ODDĚLITELNOST SYSTÉMU OTEVŘENÝCH KONVEXNÍCH MNOŽIN *

Jiří Rohn

Od té doby, kdy byla uveřejněna práce Dubovického a Miljutina [1], hraje oddělitelnost konvexních množin důležitou roli v teorii optimalizace ve vektorových prostorech (viz též [2]). V této práci je uvedeno zobecnění pojmu oddělitelnosti pro libovolné systémy vlastních otevřených konvexních množin v topologických vektorových prostorech a jsou uvedeny některé postačující podmínky pro oddělitelnost v uvedeném smyslu.

Z funkcionální analýzy je známa tato věta o oddělitelnosti dvou konvexních množin: 1) Nechť A B jsou disjunktní konvexní podmnožiny topologického vektorového prostoru (v dalším zkr. TVP) E, přičemž A je vlastní otevřená podmnožina. Potom existuje uzavřená nadrovina M oddělující A od B (tj. A, B leží v různých poloprostorech, určených nadrovinou M), přičemž $A \cap M = \emptyset$. 2) Je-li navíc i B otevřená, lze M volit tak, že bude platit i $B \cap M = \emptyset$. Tato tvrzení je možno přeformulovat takto: 1) existuje otevřený poloprostor H tak, že $A \subset H$ a $H \cap B = \emptyset$, 2) existují otevřené poloprostory H_A, H_B takové, že $A \subset H_A$, $B \subset H_B$, $H_A \cap H_B = \emptyset$. To nás vede k myšlence zobecnit pojem oddělitelnosti pro libovolné systémy vlastních otevřených konvexních množin (zkr. VOK-systémy):

<u>Definice</u>. Nechť S je VOK-systém podmnožin TVP E. Řekneme, že systém S je oddělitelný, jestliže ke každému $A \in S$ existuje otevřený poloprostor H_A tak, že $A \subset H_A$ a $\bigcap_{A \in S} H_A = \emptyset$.

Z této definice ihned plyne, že vztah $\cap S = \emptyset$ (tím je míněno $\bigcap_{A \in S} A = \emptyset$) je nutnou podmínkou oddělitelnosti systému S. V práci [4] je dokázána věta, ukazující, že v konečněrozměrném případě je tato podmínka rovněž postačující:

<u>Věta 1</u>. Neprázdný VOK-systém S podmnožin n-rozměrného euklideovského prostoru E_n je oddělitelný právě když $\cap S = \emptyset$.

Odpověď na otázku, zda uvedená podmínka je postačující i v případě obecného TVP, není autorovi dosud známa. V dalším uvedeme pouze některé dílčí výsledky. Slovo "poloprostor" znamená vždy "otevřený poloprostor".

* Výtah ve sborníku „II. celostátní konference o matem. met. v ekonomii, [illegible], 24.–28.9.1972", EMÚ, Praha 1973

__Věta 2.__ Nechť S je neprázdný VOK-systém podmnožin TVP E takový, že pro každé $x \in \bigcup_{A \in S} A$ je množina $M_x = \{ A \in S ; x \notin A \}$ konečná a neprázdná. Potom systém S je oddělitelný.

__Věta 3 (srv. [5]).__ Konečný neprázdný VOK-systém S v TVP E je oddělitelný právě když $\bigcap S = \emptyset$.

Důkaz věty 2 využívá axiomu výběru a pro jeho délku (přes tři strany) jej zde neuvádíme. Věta 3 je snadným důsledkem věty 2. Podáme však její samostatný důkaz, který na tomto jednodušším případě osvětlí myšlenku, na níž je založen důkaz věty 2.

__Důkaz věty 3.__ Nechť $S = \{ A_1 , \dots , A_n \}$. Z toho, že všechny A_i jsou neprázdné a $\bigcap S = \emptyset$ plyne, že $n \geq 2$. Sestrojíme nyní indukcí poloprostory $H_1 , \dots , H_{n-1}$ tak, že pro každé m, $1 \leq m \leq n-1$ je $A_m \subset H_m$ a $\bigcap_{j=1}^{m} H_j \cap \bigcap_{j=m+1}^{n} A_j = \emptyset$. 1) Je $A_1 \cap \bigcap_{j=2}^{n} A_j = \emptyset$, při čemž A_1 je vlastní otevřená konvexní množina, $\bigcap_{j=2}^{n} A_j$ konvexní množina. Podle věty uvedené na začátku existuje poloprostor H_1 tak, že $A_1 \subset H_1$ a $H_1 \cap \bigcap_{j=2}^{n} A_j = \emptyset$.
2) Nechť vztah $\bigcap_{j=1}^{m} H_j \cap \bigcap_{j=m+1}^{n} A_j = \emptyset$ je dokázán pro $m = 1, 2, \dots, k$, $k \leq n-2$. Podle indukčního předpokladu je $A_{k+1} \quad (\bigcap_{j=1}^{k} H_j \cap \bigcap_{j=k+2}^{n} A_j) = \emptyset$, přičemž A_{k+1} je vlastní otevřená konvexní množina, $\bigcap_{j=1}^{k} H_j \cap \bigcap_{j=k+2}^{n} A_j$ je konvexní množina, takže opět podle citované věty existuje poloprostor H_{k+1} tak, že $A_{k+1} \subset H_{k+1}$ a $H_{k+1} \cap (\bigcap_{j=1}^{k} H_j \cap \bigcap_{j=k+2}^{n} A_j) = \emptyset$, což je tvar výše uvedeného vzorce pro $m = k+1$.

Existují tedy poloprostory H_i, $1 \leq i \leq n-1$ takové, že $A_i \subset H_i$, $1 \leq i \leq n-1$ a $A_n \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} H_j = \emptyset$. Obvyklou úvahou ukážeme, že existuje poloprostor H_n takový, že $A_n \subset H_n$
$H_n \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} H_j = \bigcap_{j=1}^{n} H_j = \emptyset$, cbd.

Podmínka konečnosti každé množiny M_x ve větě 2 není však nutnou podmínkou oddělitelnosti, jak ukazuje věta 4. Předešleme jí ekvivalentní formulaci oddělitelnosti, jejíž jednoduchý důkaz vynecháme:

__Lemma.__ Nechť S je VOK-systém v TVP E. Potom S je oddělitelný právě když ke každému $A \in S$ existuje konvexní množina $B_A \subset E$ tak, že $A \cap B_A = \emptyset$ a $\bigcup_{A \in S} B_A = E$.

__Věta 4.__ Nechť E je separabilní normovaný lineární prostor, S VOK-systém v E takový, že ke každému $x \in E$ existuje okolí U bodu x takové, že pro nekonečně mnoho $A \in S$ je $U \cap A = \emptyset$. Potom systém S je oddělitelný.

__Důkaz.__ Řekneme, že množina $M \subset E$ má vlastnost W, jestliže existuje nekonečně mnoho $A \in S$ tak, že $M \cap A = \emptyset$. Označme $K(x,r)$ otevřenou kouli o středu x a poloměru r. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je spočetná hustá podmnožina v E. Položme $\mathcal{K} = \{K(x_j,r)\ ;\ j = 1,2,\dots, r$ racionální, $K(x_j,r)$ má vlastnost $W\}$. Potom systém $\mathcal{K}$ je spočetný, pišme $\mathcal{K} = \{K_j\}_{j=1}^{\infty}$. Ukážeme, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = E$: Nechť $x \in E$. Potom podle předpokladu existuje okolí U bodu x, které má vlastnost W. Zvolme r tak, aby bylo $K(x,r) \subset U$. Potom koule $K(x, \frac{r}{2})$ obsahuje jistý bod x[illegible]početné husté podmnožiny. Zvolme racionální s, $\|x - x_j\| < s < \frac{r}{2}$. Pak $x \in K(x_j,s) \subset K(x,r) \subset U$, tedy $K(x_j,s)$ má vlastnost W, $x \in K(x_j,s) \in \mathcal{K}$, proto $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Ke každému $j = 1,2,\dots$ existuje spočetný systém S_j množin z S, disjunktních s K_j. Položme $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \subset S$. Ukážeme, že spočetný systém R je oddělitelný; potom i S bude oddělitelný. Nechť $R = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro $n = 1,2,\dots$ položme $C_n = \{j\ ;\ K_j \cap A_n = \emptyset\}$. Potom C_n je spočetná. Definujme nyní zobrazení f množiny přirozených čísel N do sebe tímto rekurentním předpisem:

$$f(1) = \min C_1$$

$$f(n+1) = \min (C_{n+1} - \{f(j)\ ;\ 1 \leq j \leq n\}).$$

Vzhledem k tomu, že ke každému j existuje spočetný systém S_j množin, disjunktních s K_j, je f zobrazení na N. Pro A_n R položme nyní $B_{A_n} = K_{f(n)}$. Protože $f(n) \in C_n$, je $B_{A_n} \cap A_n = \emptyset$ a dále je $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{f(n)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = E$, takže podle lemmatu je systém [illegible]oddělitelný. Tedy i S je oddělitelný.

Závěrem tedy musíme konstatovat, že otázka, zda podmínka $\cap S = \emptyset$ je nutnou a postačující podmínkou k oddělitelnosti systému S, zůstává zatím nevyřešena. Je však pravděpodobné, že její zodpovězení by mělo určitý význam pro teorii optimalizace.

LITERATURA

[1] DUBOVICKIJ, A.J. - MILJUTIN, A.A.: Ekstremaľnyje zadači pri naličii ograničenij. Žurn. vyčisl. mat. i fiz., Tom 5, 3 (1965), str. 395-453.

[2] GIRSANOV, I.V.: Lekcii po matematičeskoj teorii ekstremaľnych zadač. Moskva 1970.

[3] SCHAEFFER, H.: Topologičeskije vektornyje prostranstva. Moskva, 1971.

[4] GALE, D. - KLEE, V.: Continuous Convex Sets. Math. Scand. 7 (1959), str. 379-391.

[5] VLACH, M.: A Separation Theorem for Finite Families. CMUC, 12, 4(1971), str. 655-660.

SOUHRN

Jiří Rohn

ODDĚLITELNOST SYSTÉMŮ OTEVŘENÝCH KONVEXNÍCH MNOŽIN

Nechť E je topologický vektorový prostor. Systém S vlastních otevřených konvexních podmnožin E nazýváme oddělitelným, jestliže ke každému $A \in S$ existuje otevřený poloprostor H_A tak, že $A \subset H_A$ a $\bigcap_{A \in S} H_A = \emptyset$. Je-li pro každé $x \in \bigcup_{A \in S} A$ množina $M_x = \{A \in S ; x \notin A\}$ neprázdná a konečná, pak S je oddělitelný (věta 2). Z věty 4 však plyne, že uvedená podmínka není nutnou podmínkou oddělitelnosti. Je-li systém S konečný, pak je oddělitelný právě, když $\bigcap_{A \in S} A = \emptyset$.

РЕЗЮМЕ

Иржи Рох

ОТДЕЛИМОСТЬ СИСТЕМ ОТКРЫТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

Пусть E - топологическое векторное пространство. Система S собственных открытых выпуклых подмножеств E называется отделимой, если для всякого $A \in S$ существует открытое полупространство H_A такое, что $A \subset H_A$ и $\bigcap_{A \in S} H_A = \emptyset$. Доказывается: если для всякого $x \in \bigcup_{A \in S} A$ множество $M_x = \left\{ A \in S;\ x \notin A \right\}$ является непустым и конечным, то система S отделима (теорема 2). Приведенное условие не является, однако, необходимым условием отделимости, что является следствием теоремы 4. Конечная система S отделима тогда и только тогда, когда $\bigcap_{A \in S} A = \emptyset$ (теорема 3).

S U M M A R Y

Jiří Rohn

SEPARATED SYSTEMS OF OPEN CONVEX SETS

Let E be a topological vector space. A system S of proper open convex subsets of E is said to be separated if for each $A \in S$ there exists an open half-space H_A, $A \subset H_A$ and $\bigcap_{A \in S} H_A = \emptyset$. It is proved that if for every $x \in \bigcup_{A \in S} A$ the set $M_x = \{A \in S ; x \notin A\}$ is nonempty and finite, then S is separated (Theorem 2). It follows from Theorem 4 that there exists a separated system S for which the condition mentioned in Theorem 2 does not hold. In case the system S is finite we have: System S is sepatated if and only if $\bigcap_{A \in S} A = \emptyset$ (Theorem 3).

ZUSAMMENFASSUNG.

Jiří Rohn

TRENNBARKEIT DER SYSTEMEN VON OFFENEN KONVEXEN MENGEN

Sei E ein topologischer Vektorraum. Das System S der eigenen ofennen konvexen Untermengen von E wird trennbar genannt, wenn zum jeden $A \in S$ so ein offener Halbraum H_A existiert, dass $A \subset H_A$ und $\bigcap_{A \in S} H_A = \emptyset$ gilt. Ein endliches system S ist dann und nur dann trennbar, wenn $\bigcap_{A \in S} A = \emptyset$ (Satz 3). Im Fall des allgemeinen Systems S wird eine hinreichende Bedingung gegeben (Satz 2), die aber nicht notwendig ist (Folgerung des Satzes 4).