ACTA POLYTECHNICA - Práce ČVUT v Praze, IV, 1973, vědecká konference

ITERAČNÍ METODA ŘEŠENÍ SOUSTAVY NELINEÁRNÍCH ROVNIC

Jiří Rohn

K řešení soustavy s nelineárních rovnic o s neznámých

$$F_i(x_1, \ldots, x_s) = 0, \quad i = 1, \ldots, s$$

se většinou používá Newtonovy metody, která konverguje velmi rychle, má však tu nevýhodu, že vyžaduje dosti přesnou předběžnou lokalizaci kořene. V tomto referátu uvádíme iterační metodu, při které je možno počáteční iteraci zvolit libovolně; její konvergence je však pomalejší, než konvergence Newtonovy metody. Výsledky shrneme v jediné větě, jejíž důkaz zde pro nedostatek místa vynecháváme.

Věta. Nechť funkce $F_i(x_1, \ldots, x_s)$, $i = 1, \ldots, s$, mají v intervalu $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_s, b_s \rangle$ spojité parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných a nechť platí

pro $i = 1, \ldots, s$, $x \in I$ je (1)

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{s} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \right| < \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) \right|,$$

pro každé i, $i = 1, \ldots, s$, jsou-li x, y body (2)
z intervalu I takové, že $x_i = a_i$, $y_i = b_i$, pak $F_i(x) F_i(y) < 0$.

Potom existuje právě jeden bod $z \in I$ takový, že

$$F_i(z_1, \ldots, z_s) = 0, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Nechť m, M, α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ jsou reálná čísla taková, že pro každé $i = 1, \ldots, s$ je

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right| - \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right| \geq m > 0 \quad v \ I$$

$$\left| \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right| \leq M \quad v \ I, \qquad 0 < |\alpha_i| < \frac{1}{M}$$

$$\operatorname{sign} \alpha_i = \operatorname{sign} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}, \qquad \alpha = \min_i |\alpha_i|$$

Zvolme $x^{(0)} \in I$ a definujme posloupnost $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ rekurentně předpisem

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \alpha_i F_i(x_1^{(n)}, \dots, x_s^{(n)}), \quad i = 1, \dots, s, \quad n \geq 0.$$

Potom $x^{(n)} \longrightarrow z$ a pro každé n je

$$\| x^{(n)} - z \| \leq \frac{\max_i |\alpha_i F_i(x^{(0)})|}{\alpha m} (1 - \alpha m)^n .$$

P o z n á m k y . (a) Předpoklad (2) je možno nahradit následujícími dvěma předpoklady:

pro každé i, i = 1, ...,s, je-li $x \in I$, (2.1)

a platí buď $x_i = a_i$, nebo $x_i = b_i$, pak $F_i(x) \neq 0$,

ke každému i, i = 1, ...,s, existují $x \in I$, (2.2)

$y \in I$ tak, že $x_i = a_i$, $y_i = b_i$, $F_i(x)\, F_i(y) < 0$.

(b) existence čísel m, M plyne z (1) a ze spojitostí funkcí $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ na kompaktní množině I.

(c) vzhledem k (1) zachovává každá z derivací $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$, i = 1, ...,s, v intervalu I znamení, takže požadavek $sign\ \alpha_i = sign \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ má smysl.

(d) v odhadu $\| x^{(n)} - z \|$ používáme normu $\| y \| = \max_i |y_i|$.

P ř í k l a d . Ukážeme nyní, jak lze uvedenou metodou řešit soustavu

$$2x^3 - y^2 - 1 = 0$$
$$xy^3 - y - 4 = 0 .$$

Ověříme, že funkce $F_1(x,y) = 2x^3 - y^2 - 1$, $F_2(x,y) = xy^3 - y - 4$ splňují na intervalu $\langle 0{,}9; 2\rangle \times \langle 1; 2\rangle$ předpoklady (1) a (2).

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| - \left|\frac{\partial F_1}{\partial y}\right| = 6x^2 - 2y \geq 6 \cdot 0{,}9^2 - 2 \cdot 2 = 0{,}86 > 0 \qquad (1)$$

$$\left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right| - \left|\frac{\partial F_2}{\partial x}\right| = 3xy^2 - 1 - y^3 \geq 2{,}7y^2 - 1 - y^3 .$$

Protože funkce $\varphi(y) = 2{,}7y^2 - 1 - y^3$ je v intervalu $\langle 1,2 \rangle$ konkávní, je $\varphi(y) \geq \min(\varphi(1), \varphi(2)) = 0{,}7 > 0$. Tím jsme ověřili platnost (1) a současně jsme zjistili, že $m = 0{,}7$.

Je-li $0{,}9 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$, pak (2)

$$F_1(0{,}9, y) = 0{,}458 - y^2 < 0$$
$$F_1(2, y) = 15 - y^2 > 0$$
$$F_2(x, 1) = x - 5 < 0$$
$$F_2(x, 2) = 8x - 6 > 0 ,$$

tedy i předpoklad (2) je splněn.

Dále je $\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\right| \leq 24$, $\left|\frac{\partial F_2}{\partial y}\right| \leq 23$, tedy $M = 24$, $\frac{1}{M} \doteq 0,041$. Protože $\frac{\partial F_1}{\partial x} > 0$, $\frac{\partial F_2}{\partial y} > 0$, musí být $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, takže můžeme volit např. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,04$. Rekurentní vzorce mají tedy tvar

$$x_{n+1} = x_n - 0,04(2x_n^3 - y_n^2 - 1)$$

$$y_{n+1} = y_n - 0,04(x_n y_n^3 - y_n - 4),$$

přičemž za počáteční iteraci můžeme vzít libovolný bod z intervalu $\langle 0,9; 2\rangle \times \langle 1; 2\rangle$.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Иржи Рон

В данной статье излагается итерационный метод решения системы нелинейных уравнений

$$F_i(x_1, \ldots, x_s) = 0 , \qquad i = 1, \ldots, s$$

Метод проиллюстрирован на примере.

EINE ITERATIONSMETHODE FÜR DIE LÖSUNG DES SYSTEMS VON NICHT-LINEAREN GLEICHUNGEN

Jiří Rohn

Im Referat wird eine Iterationsmethode für die Lösung des Systems nichtlinearen Gleichungen

$$F_i(x_1, \ldots , x_s) = 0 , \quad i = 1, \ldots , s$$

eingeführt. Die Methode wird an einem Beispiel illustriert.