ŘEŠENÍ JEDNÉ ÚLOHY NA STRUKTURNÍM MODELU PŘI INTERVALOVÉM ZADÁNÍ PARAMETRŮ A KONSTANT *

J. Bouška - J. Rohn

Používání strukturních modelů jak na úrovni národohospodářské, či na úrovni odvětví nebo podniku je dnes již značně rozšířené. Tyto modely se uplatňují zejména při vypracovávání prognóz vývoje určitého hospodářského komplexu /národního hospodářství, odvětví, podniku/ a v procesu sestavování plánu nebo jeho návrhu, a to jak střednědobého, tak i krátkodobého. Jsou velmi vhodným nástrojem pro analýzu struktury výroby ekonomického komplexu, celkové /národohospodářské/ efektivnosti jednotlivých druhů výrob, efektivnosti zahraničního obchodu, mezioblastních vztahů apod. Široké uplatnění nacházejí také v oblasti cenové, zejména při studiu a plánování vývoje cen a při zkoumání dopadů zamýšlených ekonomických opatření /např. změna úrovně cen či cenových relací; změna odpisových sazeb; odvodů ze zisku apod./. Tato značná šíře uplatnění strukturních modelů je dána především tím,že umožňují, i když velmi zjednodušeně, zobrazit vztahy mezi jednotlivými činnostmi hospodářského komplexu.

Ve většině aplikací strukturního modelu, ať již v oblasti prognostické, plánovací či analytické, se setkáváme s tím, že jen výjimečně můžeme považovat parametry /technické koeficienty/ modelu a zadávané konstanty /konečnou spotřebu či celkovou výrobu/ za jednoznačně určené veličiny. Parametry a konstanty modelu musíme totiž s větší či menší spolehlivostí odhadovat, abychom si mohli učinit představu o budoucí či analyzované situaci.

S ohledem na snadnou aplikovatelnost řešení strukturního mo-

* Sborník „IV. [illegible] [illegible]", [illegible] 17-20.3.77, Praha, EÚ, ČSAV

delu postupuje se obvykle tak, že budoucí či analyzovanou situaci charakterizujeme určitými číselnými hodnotami parametrů a konstant a pomocí modelu pak zobrazujeme jednu variantu očekávané ekonomické situace. Jinak řečeno, k modelové tvorbě variant používáme bodový odhad parametrů a konstant. Takový způsob nedává ovšem možnost přihlédnout k tomu, že některé parametry a složky konečné spotřeby či celkové produkce můžeme odhadnout podstatně spolehlivěji nebo přesněji než jiné. Nemáme tedy při tomto postupu možnost využít rozdílných znalostí a zkušeností pracovníků o jednotlivých složkách budoucí či analyzované situace.

Pokud se v některých případech "neurčitost budoucnosti" popisuje několika variantami, neusiluje se obvykle o kvantitativní popis souvislostí mezi nimi; jsou chápány jako vzájemně nezávislé.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že ve velkém počtu aplikací strukturních modelů by ekonomické povaze úloh lépe odpovídalo, kdybychom pracovali s nestejně přesnými odhady parametrů a konstant a kdyby i v řešeních tato rozdílná přesnost odhadů našla svůj odraz.

"Nepřesnost" zadávaných parametrů konstant lze ovšem vyjadřovat různě. Jeden z přístupů spočívá např. v tom, že od deterministického strukturního modelu přejdeme k modelu pravděpodobnostnímu a že pak pracujeme s vhodnými číselnými charakteristikami konstant a příslušných náhodných veličin. Takový přístup je však aplikačně dosti náročný, neboť vyžaduje znalosti o rozdělení náhodných veličin v nových situacích nebo v budoucnosti a ty jsou jen zřídka kdy dosažitelné, respektive vedou k přijímání určitých jednoduchých hypotéz o rozdělení, pro něž máme jen málo podložených důvodů.

Snadněji dosažitelné je informace o rozpětí parametrů a konstant. V řadě případů jsou pracovníci, kteří analyzují či plánují ekonomický proces, schopni na základě svých zkušeností odhadnout dosti spolehlivě interval, ve kterém se konstanty, s ohledem na vývojové tendence a očekávané strukturální změny ve výrobních technologiích a ve skladbě spotřeby, mohou nacházet. Takový intervalový odhad dovoluje pak pracovníkům přihlédnout k větší či menší stabilitě příslušné konstanty či parametru, respektive vyjádřit tímto způsobem subjektivní míru nepřesnosti odhadu.

Vzhledem k tomu, že intervalové vyjadřovací nepřesnost je při aplikacích snáze uskutečnitelná, omezíme se na tento způsob vyjadřování. V dalším budeme tedy na místo bodového odhadu konstant a parametrů uvažovat odhad intervalový. Používání intervalového odhadu při práci se strukturními modely vyvolává ovšem některé problémy, zvláště interpretačního charakteru. A zejména těm hodláme v tomto příspěvku věnovat pozornost.

Rámec dalších úvah

Problematiku intervalového zadání parametrů a konstant ve strukturním modelu budeme studovat na základním tvaru strukturního modelu, který zapíšeme maticově

(A) $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

Model v tomto tvaru umožňuje kvantitativně popisovat souvislosti mezi výrobou a spotřebou jednotlivých produktů /odvětví/ v rámci zvoleného výrobního komplexu /národního hospodářství/. Předpokládáme při tom, že výrobní činnost komplexu je rozdělena do n odlišných činností /odvětví/, z nichž každá je popsána jinou lineární produkční funkcí /strukturou materiálních nákladů/, při čemž tyto produkční funkce jsou lineárně nezávislé [1]. Užití produkce každého z n vyrábějících odvětví je pak popsáno samostatnou bilanční rovnicí (A) .

V maticovém zápisu modelu charakterizuje n-složkový sloupcový vektor $\mathbf{x}$ velikost celkové /hrubé/ produkce n vyrábějících odvětví. Vzhledem k tomu, že velikost produkce jednotlivých odvětví vyjadřujeme nezáporným číslem, platí $\mathbf{x} \geq 0$. Sloupcový vektor $\mathbf{y}$ /n-složkový/ charakterizuje velikost dodávek vyrobených produktů mimo výrobní komplex - označujeme ho jako vektor konečné produkce. Velikost dodávek jednotlivých odvětví vyjadřujeme rovněž nezáporným číslem,

1) Tento předpoklad je v praxi téměř vždy splněn, neboť jen ve výjimečných případech je možno kombinací struktur materiálních nákladů několika výrobků získat strukturu nákladů některého výrobku vyráběného v rámci výrobního komplexu.

takže platí $y \geqq 0$. Prvky matice $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}, i,j = 1,2,\dots,n$ vyjadřují spotřebu produktu i na jednu jednotku produkce ve vyrábějícím odvětví j. Velikost jednotlivé spotřeby vyjadřujeme rovněž nezáporným číslem, takže platí $\mathbf{A} \geqq \mathbf{O}$.

Je-li produkce odvětví /celková i konečná/ a spotřeba jednotlivých produktů při výrobě vyjádřena ve stejných peněžních jednotkách, což je běžné, potom prvek a_{ij} matice $\mathbf{A}$ vyjadřuje, jaký podíl představuje spotřebu produktu i v ceně jednotky produkce odvětví $a_{ij} < 1$! j, tzn., že platí $0 \leqq a_{ij} \leqq 1$. Není-li výroba odvětví j ztrátová /resp. je-li ztráta menší než nemateriální náklady/ což rovněž odpovídá běžné ekonomické situaci, potom celkové materiální náklady z výrobního komplexu budou menší než cena jednotky produkce v odvětví j, a tudíž platí

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 \ .$$

Tento předpoklad, spolu s lineární nezávislostí jednotlivých produkčních funkcí výrobního komplexu, zajišťuje, že existuje $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, že je možné propočítat tzv. komplexní koeficienty, což odpovídá ekonomické realitě.

Strukturní model se v ekonomických analýzách, plánování a prognózování uplatňuje zejména při řešení několika skupin úloh:

α) K určení konečné produkce ($\mathbf{y}$), je-li známa celková produkce ($\mathbf{x}$) a produkční funkce charakterizovaná maticí technických koeficientů ($\mathbf{A}$).

β) K určení celkové produkce ($\mathbf{x}$), je-li známa konečná produkce ($\mathbf{y}$) a produkční funkce charakterizovaná maticí technických koeficientů ($\mathbf{A}$).

γ) K řešení "smíšených" úloh, kdy je částečně známa celková produkce a částečně i konečná produkce a jsou rovněž známy produkční funkce a je třeba určit zbývající složky konečné spotřeby a celkové produkce.

ϑ) K určení změn parametrů produkční funkce /matice technických koeficientů $\mathbf{A}$/ při znalosti celkové produkce a konečné produkce.

V tomto příspěvku se budeme zabývat pouze druhou skupinou úloh, které jsou také zatím v praxi nejfrekventovanější.

Ve shodě s předcházejícím výkladem uvažujeme v dalším, že konstanty a parametry jsou zadány nepřesně. Nepřesnost jednotlivých parametrů a konstant budeme vyjadřovat intervalem. Při tom nepředpokládáme, že by některá číselná hodnota parametru či konstanty z intervalu byla preferována, že je více pravděpodobná než hodnota jiná.

Shrnutí předpokladů

V dalším vycházíme z toho, že platí základní vztah

(A) $$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} .$$

Pro každý technický koeficient a_{ij} je známa jeho horní mez $\bar{a}_{ij}$ a jeho dolní mez $\underline{a}_{ij}$, tedy platí

(B) $$\mathbf{O} \leqq \underline{\mathbf{A}} \leqq \mathbf{A} \leqq \bar{\mathbf{A}} ,$$

kde $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$, $\bar{\mathbf{A}} = \{\bar{a}_{ij}\}$, $\underline{\mathbf{A}} = \{\underline{a}_{ij}\}$,

$i,j = 1,2,\ldots,n.$

Jednotlivé složky konečné spotřeby y_i /resp. celkové produkce x_i/ jsou zadány horní mezí $\bar{y}_i$ a dolní mezí $\underline{y}_i$ resp. $\bar{x}_i$ a $\underline{x}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, že tedy platí

(C) $$\mathbf{O} \leqq \underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{y} \leqq \bar{\mathbf{y}} \text{ , resp. } \mathbf{O} \leqq \underline{\mathbf{x}} \leqq \mathbf{x} \leqq \bar{\mathbf{x}} ,$$

kde $$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \end{bmatrix},$$

resp. $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{bmatrix},$$

(D) Inverzní matice /matice komplexních koeficientů/ $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ existuje a je nezáporná.

Tyto předpoklady jsou ve shodě s ekonomickou realitou.

Popis množin řešení při intervalovém zadání konstant a parametrů

Prvou naší úlohou /ad *β*/ bude nalézt a popsat množinu ($\mathfrak{M}_x$) všech vektorů $\mathbf{x}$, které vyhovují meziodvětvovému modelu $\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$, v němž prvky matice $\mathbf{A}$ a složky vektoru $\mathbf{y}$ jsou pohyblivé v předem zadaných mezích.

Formulujme nyní úlohu matematicky. Předpokládejme, že $\mathbf{O} \leqq \underline{\mathbf{A}} \leqq \mathbf{A} \leqq \bar{\mathbf{A}}$ a dále $\underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{y} \leqq \bar{\mathbf{y}}$. Položme

$$\mathfrak{M}_x = \{\mathbf{x} \geqq 0 \mid \text{existují } \mathbf{A}, \mathbf{y} \text{ tak, že } (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y},\ \underline{\mathbf{A}} \leqq \mathbf{A} \leqq \bar{\mathbf{A}},\ \underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{y} \leqq \bar{\mathbf{y}}\}.$$

Každý prvek x z množiny $\mathfrak{M}_x$ budeme nazývat nezáporným řešením soustavy

$$(1) \qquad \begin{cases} (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \mathbf{O} \leqq \underline{\mathbf{A}} \leqq \mathbf{A} \leqq \bar{\mathbf{A}},\ \underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{y} \leqq \bar{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Soustava (1) je soustavou lineárních rovnic s nepřesně zadanými koeficienty. Následující věta ukazuje, že nezáporná řešení této soustavy je možno vyjádřit jako řešení soustavy lineárních nerovností s konstantními koeficienty.

Věta 1.

Vektor $\mathbf{x}$ je nezáporným řešením soustavy (1) právě když je nezáporným řešením soustavy

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{x} \leqq \bar{\mathbf{y}} \\ \underline{\mathbf{y}} \leqq (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{x}\,. \end{cases}$$

Důkaz.

1. Nechť $\mathbf{x}$ je nezáporným řešením (1), tj. existují $\mathbf{A}$, $\mathbf{y}$ tak, že $\underline{\mathbf{A}} \leqq \mathbf{A} \leqq \bar{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{y} \leqq \bar{\mathbf{y}}$, $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Z nerovností $\underline{\mathbf{A}} \leqq \mathbf{A} \leqq \bar{\mathbf{A}}$ vyplývá $\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}} \leqq \mathbf{E} - \mathbf{A} \leqq \mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}}$, takže vzhledem k nezápornosti vektoru $\mathbf{x}$ je

   $$(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{x} \leqq (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y} \leqq \bar{\mathbf{y}}$$
   $$(\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{x} \geqq (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y} \geqq \underline{\mathbf{y}}\,,$$

   což je soustava (2).

2. Nechť vektor $\mathbf{x} \geqq \mathbf{O}$ splňuje soustavu (2). Pro i = 1,2,..., n položme pro $t \in \langle 0,1 \rangle$,

$$\varphi_i(t) = x_i - \sum_j (\underline{a}_{ij} + t(\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}))x_j - (\underline{y}_i + t(\bar{y}_i - \underline{y}_i)).$$

Potom pro každé i, $i = 1,\dots,n$ je

$$\varphi_i(0) = x_i - \sum_j \underline{a}_{ij} x_j - \underline{y}_i = ((\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})\mathbf{x} - \underline{\mathbf{y}})_i \geqq 0$$

$$\varphi_i(1) = x_i - \sum_j \bar{a}_{ij} x_j - \bar{y}_i = ((\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\mathbf{x} - \bar{\mathbf{y}})_i \leqq 0 ,$$

proto existuje $t_i \in \langle 0,1 \rangle$ tak, že $\varphi_i(t_i) = 0$.

Položme nyní pro $i,j = 1,\dots,n$

$$a_{ij} = \underline{a}_{ij} + t_i(\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})$$

$$y_i = \underline{y}_i + t_i(\bar{y}_i - \underline{y}_i) .$$

Potom $\underline{a}_{ij} \leqq a_{ij} \leqq \bar{a}_{ij}$, $\underline{y}_i \leqq y_i \leqq \bar{y}_i$ a

$$x_i - \sum_j a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1,\dots,n ,$$

takže položíme-li $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{y} = (y_i)$, pak $\underline{\mathbb{A}} \leqq \mathbb{A} \leqq \bar{\mathbb{A}}$,

$\underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{y} \leqq \bar{\mathbf{y}}$, $(\mathbb{E} - \mathbb{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}$, tedy $\mathbf{x}$ je nezáporným řešením soustavy (1).

Přímým důsledkem Věty 1 je tato věta :

Věta 2.

Množina $\mathfrak{M}_x$ nezáporných řešení soustavy (1) je konvexní mnohostěn.

Důkaz.

Podle Věty 1 je tato množina rovna množině nezáporných řešení soustavy (2) , což je soustava lineárních nerovností s konstantními koeficienty, jejíž množinou řešení je konvexní mnohostěn.

Příklad 1.

K ilustraci výsledku použijeme příkladu strukturního modelu s dvěma odvětvími.

Jsou zadány matice $\underline{A}$, $\bar{A}$ a vektory konečné spotřeby $\underline{y}$, $\bar{y}$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,210 & 0,202 \\ 0,510 & 0,105 \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0,190 & 0,198 \\ 0,490 & 0,095 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} 7,5 \\ 2,2 \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} 6,6 \\ 1,8 \end{bmatrix}$$

Množinu řešení $\mathfrak{M}_x$ zobrazuje v tomto případě čtyřúhelník s vrcholy ABCD /viz obr. 1/, který je popsán soustavou 4 nerovností

$$\begin{bmatrix} 1 - 0,210 & - 0,202 \\ - 0,510 & 1 - 0,105 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7,5 \\ 2,2 \end{bmatrix}$$

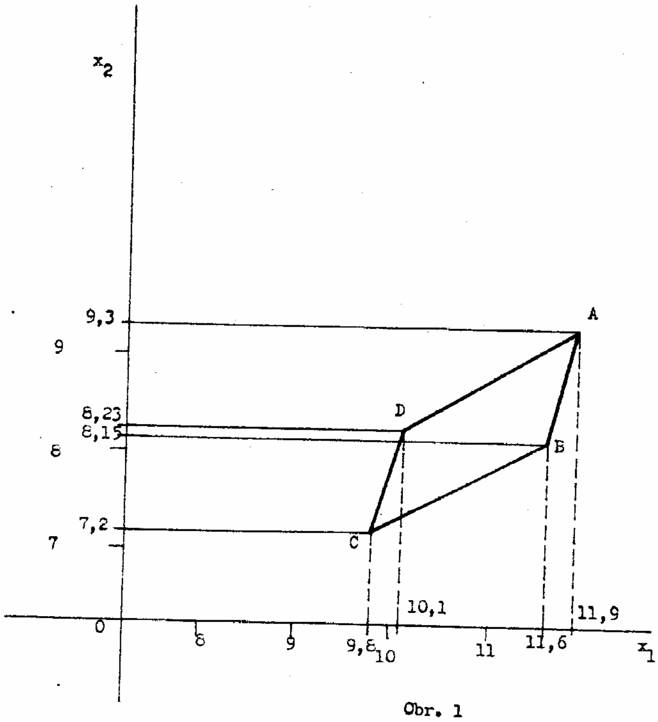
$$\begin{bmatrix} 6,6 \\ 1,8 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 - 0,190 & - 0,198 \\ - 0,490 & 1 - 0,095 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Intervalové charakteristiky řešení strukturního modelu

Při intervalovém zadání konstant a parametrů popisuje množinu řešení strukturního modelu konvexní mnohostěn. Z hlediska matematického popisu je to však útvar nepříliš snadno aplikovatelný.

Uvažme např. tuto situaci. V plánovacím centru /národohospodářském či resortním, podnikovém/ na základě průzkumu u spotřebitelů a rozborem vývojových tendencí odhadli intervalově předpokládanou spotřebu po jednotlivých výrobcích $(\underline{y}_i, \bar{y}_i, i = 1,2,\ldots n)$. Pracovníci řídící výrobní proces odhadli vliv předpokládaných změn v technologických procesech na normy /koeficienty/ spotřeby $(\underline{A},\bar{A})$. Na základě strukturního modelu mohou pracovníci plánovacího centra popsat množinu řešení /výrobních programů/ výrobního komplexu jako celku. Stojí nyní před úkolem sdělit výrobní záměry jednotlivým výrobcům [2/]. Není jistě obtížné vybrat podle "nějakého"

2/ Předpokládejme pro jednoduchost, že každý výrobce vyrábí právě jeden druh, resp. skupinu výrobků.



Obr. 1

kritéria jednu z nekonečně mnoha přípustných výrobních variant a na ni orientovat výrobní činnost výrobců. Použije-li plánovací centrum vůči výrobcům takový postup, chová se, jako by disponovalo pouze jedinou možností k uspokojení potřeb. Nevyjadřuje nepřesnost potřeb a technologických změn, s nimiž centrum, chtě nechtě, pracuje.

Chce-li plánovací centrum vyjádřit vůči jednotlivým výrobcům nepřesnost, resp. určitou "volnost" sdělovaných výrobních záměrů, stojí před otázkou, jak ji vyjádřit. Informace o výrobních záměrech sdělovaná výrobci musí být takové povahy, aby zajišťovala:

a/ rovnováhu výrobního komplexu jako celku,

b/ nezávislost výrobních záměrů jednoho výrobce na výrobních záměrech jiného nebo jiných výrobců.

Prvá vlastnost má zajistit, aby rámec, v němž se jednotliví výrobci mohou pohybovat, nepřipouštěl řešení ležící mimo množinu přípustných řešení $\mathfrak{M}_x$. Jinými slovy, jestliže se všichni výrobci budou pohybovat v rámci nepřesně zadaných výrobních úkolů a technických podmínek, musí být zajištěno, že požadavky na spotřebu /nepřesně zadanou/ budou výrobním komplexem splněny.

Druhá vlastnost má zajistit, aby výrobce při posuzování vlastních výrobních úkolů při omezených technologických možnostech nebyl vázán na informace o výrobních záměrech jiných výrobců /ať dodavatelů či odběratelů/, neboť taková informace je pro něho prakticky nedosažitelná.

Požadované vlastnosti má intervalové zadávání výrobních záměrů a intervalové vymezení technologických podmínek jednotlivým výrobcům.

S odlišnou situací se setkáváme v průběhu přípravy plánu nebo prognostických záměrů. Na základě kombinace návrhů jednotlivých výrobců a na základě rozboru jejich výrobních možností vzniká poměrně velký počet variant výrobních úkolů výrobního komplexu - variant vektorů celkové produkce ($\mathbf{x}^*$). Přitom u každé varianty je nutné posoudit, zda je přijatelná či ne, což znamená posoudit, zda vektor $\mathbf{x}^*$ je v souladu s uvažovanou konečnou produkcí vymezenou vektory $\underline{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}$ při omezené variabilitě produkčních funkcí charakterizované maticemi $\underline{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}$. Je tedy žádoucí vymezit $\mathbf{x}$ rovněž intervalově, tj. vymezit pro každé odvětví interval, v němž se jako celková produkce může pohybovat, aniž by přitom konečná spotřeba vybočila ze stanovených mezí. Jinými slovy, jde o nalezení intervalu, který by byl vnořen do množiny nezáporných řešení $\mathfrak{M}_x$.

Důležitou číselnou charakteristikou, umožňující získat přibližnou představu o rozměrech mnohostěnu $\mathfrak{M}_x$, jsou maximální a minimální hodnoty celkové produkce jednotlivých odvětví při zadaných mezích konečné spotřeby, tj. čísla $\max\limits_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i$, $\min\limits_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i$, $i = 1,\ldots,n$.

Otázce výpočtu těchto čísel je věnován další odstavec.

Maximální intervaly

Předcházející výklad ukázal, že jednou z důležitých charakteristik při intervalové prezentaci výsledků je znalost maximální a minimální hodnoty jednotlivých složek vektoru řešení. Proto se v tomto odstavci budeme zabývat otázkou výpočtu čísel $\max\limits_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i$, $\min\limits_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i$, $i = 1,\ldots,n$. Vzhledem k tomu, že množina $\mathfrak{M}_x$ je konvexní mnohostěn, jde o nalezení extrému na konvexním mnohostěnu, konkrétně o maximalizaci nebo minimalizaci lineárního funkcionálu $f(x) = x_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ na konvexním mnohostěnu daném soustavou nerovností $(E - \tilde{A})\,x \leq \bar{y}$, $(E - \underline{A})x \geq \underline{y}$. Jedná se tedy o řešení 2n úloh lineárního programování. V dalším ukážeme, že výpočty je možno provést bez použití simplexové metody.

Zabývejme se nejprve úlohou, kdy je množina $\mathfrak{M}_x$ popsána soustavou nerovností (2) a naším cílem je vypočítat čísla $\max\limits_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i$, $\min\limits_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Výpočty je možno v tomto případě provést na základě Věty 3.

Věta 3.
Nechť $\bar{y} > 0$ a nechť soustava

$$(E - \bar{A})\,\bar{w} = \bar{y}$$

má nezáporné řešení $\bar{w}$. Potom soustava

$$(\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})\,\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{y}}$$

má nezáporné řešení $\underline{\mathbf{v}}$. Vektory $\underline{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ jsou nezáporná řešení soustavy (1) a pro každé nezáporné řešení $\mathbf{x}$ soustavy (1) platí

$$\underline{\mathbf{v}} \leqq \mathbf{x} \leqq \bar{\mathbf{v}} .$$

Důkaz.

Jelikož $\bar{\mathbf{y}} > 0$, $\bar{\mathbf{v}} \geqq 0$, $(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\,\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{y}}$, je $(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1} \geqq 0$. Dále je $(\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} = (\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbb{A}} - \underline{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{y}} + (\bar{\mathbb{A}} - \underline{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} \geqq \bar{\mathbf{y}} > 0$, takže je $(\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})^{-1} \geqq 0$, tedy $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})^{-1}\, \underline{\mathbf{y}} \geqq 0$. Dokážeme nyní, že vektory $\underline{\mathbf{v}}$, $\bar{\mathbf{v}}$ jsou nezáporná řešení soustavy (1). Především je $(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{y}}$, takže stačí dokázat, že $(\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} \geqq \underline{\mathbf{y}}$. To však plyne z toho, že $(\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} = (\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbb{A}} - \underline{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} \geqq \bar{\mathbf{y}} + (\bar{\mathbb{A}} - \underline{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} \geqq$ $\geqq \bar{\mathbf{y}} \geqq \underline{\mathbf{y}}$. Podobně pro $\underline{\mathbf{v}}$.

Je-li nyní x řešením soustavy (1), je

$$(2) \qquad \begin{cases} (\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\mathbf{x} \leqq \bar{\mathbf{y}} \\ (\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})\mathbf{x} \geqq \underline{\mathbf{y}} \end{cases} .$$

Jelikož $(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1} \geqq 0$, $(\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})^{-1} \geqq 0$, dostáváme z (2) vynásobením těmito maticemi

$$\underline{\mathbf{v}} = (\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})^{-1}\underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{x} \leqq (\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1}\, \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{v}} ,$$

čímž je důkaz dokončen.

Z uvedené věty ihned plyne metoda výpočtu čísel max x_i , min x_i. Stačí vypočíst vektory

$$(5) \qquad \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= (\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1}\bar{\mathbf{y}} \\ \underline{\mathbf{v}} &= (\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})^{-1}\underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad ;$$

potom je

$$\max_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i = \bar{v}_i$$

$$\min_{x \in \mathfrak{M}_x} x_i = \underline{v}_i \quad , \quad i = 1,\dots,n.$$

Jak je patrno, je výpočet maximálních a minimálních hodnot složek snadný. Všechny složky vektoru $\mathbf{x}$ nabývají na množině $\mathfrak{M}_x$ svého maxima na vrcholu $\bar{\mathbf{v}}$ a minima na vrcholu $\underline{\mathbf{v}}$.

Příklad 2.

K ilustraci výsledku použijeme údajů z Příkladu 1. Dostáváme

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 - 0,210 & - 0,202 \\ - 0,510 & 1 - 0,105 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7,5 \\ 2,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,9 \\ 9,3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 - 0,190 & - 0,198 \\ - 0,490 & 1 - 0,095 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6,6 \\ 1,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,8 \\ 7,2 \end{bmatrix}$$

Vrcholu $\bar{\mathbf{v}}$ odpovídá vrchol A a vrcholu $\underline{\mathbf{v}}$ vrchol C čtyřúhelníka na obr. 1.

Uvedeme nyní ještě jedno znění Věty 3, které má pro praxi určitý význam. V praxi někdy nemáme apriorně zadány matice $\underline{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}$, ale máme zadánu matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{y}$ a matice $\underline{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{A}}$ získáme odhadem přesnosti měření hodnot koeficientů matice $\mathbf{A}$, tj. odhadneme, že skutečná hodnota /kterou neznáme/ ij-tého technického koeficientu leží v intervalu

$$\langle a_{ij} - \underline{\delta}_{ij},\ a_{ij} + \bar{\delta}_{ij} \rangle.$$

Položíme-li nyní

$$\underline{\Delta} = (\underline{\delta}_{ij}) \ , \ \bar{\Delta} = (\bar{\delta}_{ij}) \ , \ \text{máme}$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \underline{\Delta}, \ \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \bar{\Delta}.$$

O pevné matici $\mathbf{A}$ můžeme předpokládat, že soustava

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 \quad ,$$

kde $\mathbf{y}_0 > 0$, má nezáporné řešení $\mathbf{x}_0$, tj. že $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \geqq \mathbf{O}$.
Otázka nyní zní, jaké musí být matice $\underline{\Delta}$, $\bar{\Delta}$, aby $(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \geqq \mathbf{O}, (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})^{-1} \geqq \mathbf{O}$. Výsledek je obsažen v této větě :

Věta 4.

Nechť $(\mathbb{E} - \mathbb{A})\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{x}_0 \geqq \mathbb{O}$, $\mathbf{y}_0 > \mathbb{O}$, nechť $\underline{\Delta} \geqq \mathbb{O}$, $\bar{\Delta} \geqq \mathbb{O}$, $\mathbb{A} - \underline{\Delta} \geqq \mathbb{O}$ a $\bar{\Delta}\mathbf{x}_0 < \mathbf{y}_0$. Potom $(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1} \geqq \mathbb{O}$, $(\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})^{-1} \geqq \mathbb{O}$, takže pro každé řešení $\mathbf{x}$ soustavy (1) je

$$\underline{\mathbf{v}} = (\mathbb{E} - \underline{\mathbb{A}})^{-1}\,\underline{\mathbf{y}} \leqq \mathbf{x} \leqq (\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1}\,\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{v}} .$$

Důkaz.

Tato věta bude plynout z Věty 3, jakmile dokážeme, že je splněn její předpoklad, totiž že soustava

$$(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{y}}$$

má nezáporné řešení $\bar{\mathbf{v}}$.

Je však

$$(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})\mathbf{x}_0 = (\mathbb{E} - \mathbb{A} - \bar{\Delta})\mathbf{x}_0 = (\mathbb{E} - \mathbb{A})\mathbf{x}_0 - \bar{\Delta}\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 - \bar{\Delta}\mathbf{x}_0 > \mathbb{O},$$

takže podle známé věty je $(\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1} \geqq \mathbb{O}$ čili vektor $\bar{\mathbf{v}} = (\mathbb{E} - \bar{\mathbb{A}})^{-1}\bar{\mathbf{y}}$ je nezáporný, čímž je důkaz dokončen, protože ostatní plyne z Věty 3.

Vnořené intervaly

V tomto odstavci se budeme zabývat otázkou nalezení takové podmnožiny množiny $\mathfrak{M}_x$, která by byla plně popsána pouze dvěma n-rozměrnými vektory. Takový popis umožňuje totiž intervalovou presentaci výsledků, což je naším cílem, Jinými slovy jde o to, jak vnořit do konvexního mnohostěnu $\mathfrak{M}_x$ "kvádr", jehož hrany jsou rovnoběžné s osami souřadnic. K úplnému popisu takového kvádru postačí znalost dvou n-rozměrných vektorů.

Naším prvým úkolem bude popsat všechny intervaly, vnořené do soustavy (2) : Nechť jsou dány dva vektory $\mathbf{u} = (u_i)$, $\mathbf{d} = (d_i)$, $\mathbf{d} \geqq 0$. Interval $\langle u_1, u_1 + d_1\rangle \cdot \ldots \cdot \langle u_n, u_n + d_n\rangle$ označíme $\langle \mathbf{u}, \mathbf{d}\rangle$. Potom čísla $d_1, \ldots, d_n$ jsou délkami jednotlivých stran tohoto intervalu. V dalším použijeme tohoto způsobu zápisu intervalů.

Nechť jsou dány matice $\underline{A}$, $\bar{A}$. Položme

$$\bar{A}^{(d)} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & & & 0 \\ & \bar{a}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{a}_{12} & \cdots & \underline{a}_{1n} \\ \underline{a}_{21} & 0 & \cdots & \underline{a}_{2n} \\ \underline{a}_{n1} & \underline{a}_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Za toho označení platí

Věta 6.

Interval $\langle u, d \rangle$ leží v množině nezáporných řešení soustavy

$$(2) \qquad \begin{cases} (E - \bar{A})x \leqq \bar{y} \\ (E - \underline{A})x \geqq \underline{y} \end{cases}$$

právě když vektory u, d jsou nezáporným řešením soustavy

$$(7) \qquad (i) \quad (E - \bar{A})u + (E - \bar{A}^{(d)})d \leqq \bar{y}$$

$$(ii) \quad (E - \underline{A})u - \underline{A}^{(m)} d \geqq \underline{y}.$$

Důkaz.

Výsledná soustava sestává ze dvou soustav, které jsme označili (i), (ii) .

1. Nechť interval $\langle u, d \rangle$ leží v množině nezáporných řešení soustavy (2) .

   a/ Zvolme libovolně i, $1 \leqq i \leqq n$. Označme x vektor, jehož i-tá složka je rovna $u_i + d_i$ a ostatní jsou rovny u_j. Potom x patří do $\langle u, d \rangle$, tedy pro něj platí

   $(E - \bar{A})x \leqq \bar{y}$ čili $((E - \bar{A})x)_i \leqq y_i$, tj.

   $\bar{y}_i \geqq ((E - \bar{A})x)_i = (1 - \bar{a}_{ii})x_i - \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij} x_j =$

$$= (1 - \bar{a}_{ii})(u_i + d_i) - \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij} u_j =$$

$$= (1 - \bar{a}_{ii}) u_i - \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij} u_j + (1 - \bar{a}_{ii}) d_i =$$

$$= \left((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{u} + (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}^{(d)})\mathbf{d} \right)_i .$$

Protože i bylo libovolné, je

$$(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{u} + (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}^{(d)})\mathbf{d} \leqq \bar{\mathbf{y}} .$$

b/ Podobně, zvolme libovolné i a definujme $\mathbf{x}$ takto: $x_j = u_i$, $x_j = u_j + d_j$ pro $j \neq i$. Potom $\mathbf{x}$ patří do $\langle \mathbf{u}, \mathbf{d} \rangle$, tedy $(\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$, speciálně

$$y_i \leqq ((\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{x})_i = (1 - \underline{a}_{ii}) x_i - \sum_{j \neq i} \underline{a}_{ij} x_j =$$

$$= (1 - \underline{a}_{ii}) u_i - \sum_{j \neq i} \underline{a}_{ij} (u_j + d_j) =$$

$$= ((\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{u} - \underline{\mathbf{A}}^{(d)}\mathbf{d})_i \text{ ; tudíž } (\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{u} - \underline{\mathbf{A}}^{(m)}\mathbf{d} \geqq \underline{\mathbf{y}} .$$

2. Naopak, nechť nyní pro nezáporné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{d}$ platí

$$(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{u} + (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}^{(d)})\mathbf{d} = \bar{\mathbf{y}}$$

$$(\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{u} - \underline{\mathbf{A}}^{(m)}\mathbf{d} \geqq \underline{\mathbf{y}} .$$

Ukážeme, že potom interval $\langle \mathbf{u}, \mathbf{d} \rangle$ leží v množině nezáporných řešení soustavy (2) . Nechť $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{u}, \mathbf{d} \rangle$ tj. $u_j \leqq x_j \leqq u_j + d_j$, $j = 1, \dots, n$. Potom pro každé i je

$$((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{x})_i = (1 - \bar{a}_{ii}) x_i - \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij} x_j \leqq$$

$$\leqq (1 - \bar{a}_{ii})(u_i + d_i) - \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij} u_j =$$

$$= (1 - \bar{a}_{ii})u_i - \sum_{j \neq i} \bar{a}_{ij}\, u_j + (1 - \bar{a}_{ii})\, d_i =$$

$$= ((\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}})\mathbf{u} + (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{A}}^{(d)})\mathbf{d})_i \leq \mathbf{y}_i \ ,$$

tedy $(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. Podobně je pro každé i

$$((\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x})_i = (1 - \underline{a}_{ii})\, x_i - \sum_{j \neq i} \underline{a}_{ij}\, x_j \geq$$

$$\geq (1 - \underline{a}_{ii})\, u_i - \sum_{j \neq i} \underline{a}_{ij} (u_j + d_j) =$$

$$= (1 - \underline{a}_{ii})\, u_i - \sum_{j \neq i} \underline{a}_{ij}\, u_j - \sum_{j \neq i} \underline{a}_{ij}\, d_j =$$

$$= ((\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{u} - \underline{\mathbf{A}}^{(m)}\mathbf{d})_i \geq \mathbf{y}_i ,$$

Tedy$(\mathbf{E} - \underline{\mathbf{A}})\mathbf{x} \geq \underline{\mathbf{y}}$. Proto $\mathbf{x}$ leží v množině nezáporných řešení soustavy (2) a jelikož $\mathbf{x}$ bylo libovolně zvoleno, leží v ní i celý interval $\langle \mathbf{u}, \mathbf{d} \rangle$.

Věta 6, resp. soustava nerovností (7) popisuje množinu všech intervalů, které je možno vnořit do množiny přípustných řešení, tj. do konvexního mnohostěnu $\mathfrak{M}_x$. Je zřejmé, že vnořených intervalů může být nekonečně mnoho a že je nezbytné zvolit některé kritérium, aby úloha byla jednoznačná. Ve volbě kritéria se mohou pochopitelně odrážet různé záměry uživatele. Uživatel může např. požadovat, aby vnořený interval byl co "nejširší", tj. aby jeho součet intervalů jednotlivých složek vektorů byl maximální. Nebo může např. požadovat, aby vnořený "kvádr" měl co největší obsah. Při tom může mít zájem, aby délka některých složek nebo některé složky vektoru byla velká, aby vytvářela velký manipulační prostor. Nebo naopak může požadovat, aby řešení bylo v některých složkách jednoznačné nebo téměř jednoznačné, jestliže některé další okolnosti určují určitou hladinu výroby.

Jak patrno, škála úloh spjatých s vnořením intervalu může být dosti pestrá. Některé z těchto úloh, jak vyplývá již z předběžného rozboru, nebudou snadno řešitelné, zejména, máme-li na mysli rozsáhlost soustav lineárních rovnic, s nimiž se obvykle v praxi pracuje.

S O U H R N

<u>Řešení jedné úlohy na strukturním modelu při intervalovém zadání parametrů a konstant</u>

J. Bouška - J. Rohn

V příspěvku je analyzována úloha, kdy pomocí strukturního modelu ($\mathbf{A}x + \mathbf{y} = \mathbf{x}$) se určuje celková produkce ($\mathbf{x}$), je-li zadána konečná spotřeba ($\mathbf{y}$) a lineární produkční funkce jsou charakterizovány maticí technických koeficientů $\mathbf{A}$. Při tom jak konečná spotřeba, tak i technologické vazby jsou zadány nepřesně. Nepřesnost konstant ($\mathbf{y}$) a parametrů ($\mathbf{A}$) je vyjádřena intervalově (viz předpoklady (A); (B); (C)).

Ukazuje se, že v takovém případě množinu přípustných nezáporných řešení celkové výroby ($\mathbf{x}$) popisuje soustava nerovností (2). Z hlediska interpretačního není takový popis množiny vhodný. Proto se podává přibližný intervalový popis této množiny.

Množina se přibližně popisuje jednak maximálním intervalem, který je dán vztahem (5), jednak se ukazuje, že do množiny je možno vnořit interval (viz věta 6). Vnoření intervalu není ovšem úlohou jednoznačnou, a proto nutno zvolit některé kritérium výběru.

Р Е З Ю М Е

<u>Решение одной задачи на структурной модели при задании параметров и констант при помощи интервалов</u>

И. Воушка - И. Рон

Анализируется задача состоящая в том, что с помощью структурной модели ($Ax + y = x$) определяется тотальная продукция (x), если задана конечная потребность (y) и линейные функции продукции характеризуются матрицей технических коэффициентов A. Притом как финальная потребность, так и технологические связи заданы не точно. Неточность констант (y) и параметров (A) выражается с помощью интервалов (см. предположения (A); (B); (C)).

Оказывается, что в таком случае, множество допустимых неотрицательных решений тотальной продукции (x) описывается системой неравенств (2). С точки зрения интерпретации такое описание не является подходящим. Поэтому дается приближенное описание этого множества с помощью интервалов.

Множество приближенно описывается с одной стороны с помощью максимального интервала, который задается соотношением (5), а с другой стороны показано, что в это множество возможно вложить некоторый интервал (см. теорему 6). Вложение интервала не является однако однозначной задачей, так что необходимо выбрать некоторый критерий выбора.

ZUSAMMENFASSUNG

Die Lösung einer Aufgabe auf dem Strukturmodell, wobei die Parameter und Konstanten mit Hilfe der Intervallen angegeben werden

J. Bouška - J. Rohn

Im Beitrag wird die folgende Aufgabe analysiert: mit Hilfe des Strukturmodells ($\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{x}$) wird die Gesamtproduktion ($\mathbf{x}$) bestimmt, wenn der finale Verbrauch ($\mathbf{y}$) angegeben wird und die lineare Produktionsfunktionen durch die Matrix der technischen Koeffizienten A charakterisiert werden. Dabei wird sowohl der finale Verbrauch, als auch die technologische Koppelungen nicht genau bekannt. Die Ungenauigkeit der Konstanten ($\mathbf{y}$) und Parameter ($\mathbf{A}$) wird mit Hilfe der Intervalle ausgedrückt (siehe Voraussetzungen (A); (B); (C)).

Es zeigt sich, dass in diesem Falle die Menge der zulässigen nichtnegativen Lösungen der Gesamtproduktion ($\mathbf{x}$) durch das Ungleichungsystem (2) beschrieben wird. Vom Standpunkt der Interpretation ist solche Beschreibung ungeeignet. Deshalb führt man eine approximative Beschreibung dieser Menge mit Hilfe der Intervalle an.

Die Menge wird approximativ einesteils mit Hilfe der maximalen Interval beschrieben, anderteils zeigt man, dass in die Menge ein Intervall eingetaucht werden kann (siehe Satz 6). Die Eintauchung des Intervalls ist aber nicht eine eindeutige Aufgabe; desahlb muss man ein bestimmtes Auswahlskriterium erwählen.

S U M M A R Y

The solution of a problem on an input-output model when the parameters and constants are given as intervals

J. Bouška - J. Rohn

In the paper a problem of determining a gross production vector (**x**) from a given final demand (**y**) under the assumption of a linear production function characterized by a matrix of input-output coefficients **A** is analyzed. At the same time, the final demand as well as the technology are determined with some errors. The errors in the values of constants (**y**) and parameters (**A**) are expressed in the form of intervals of admissible values (see assumptions (A), (B), (C) in the paper).

It is shown that in such a case the set of feasible non-negative gross production vectors (**x**) can be described by a system of linear inequalities (2) . This description, however, is not suitable from the point of view of interpretation. Therefore an approximate description of the set with the help of intervals is given.

The set is approximately described first by a maximal interval (given by (5)); further it is shown that another interval can be embedded into the set (see Theorem 6) . The interval is not of course embedded in a unique way. Therefore it is necessery to select some rule of choice.