Soustavy lineárních rovnic s intervalově zadanými koeficienty

JIŘÍ ROHN

Tato stať se zabývá otázkou nalezení nezáporných řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých, jejichž koeficienty jsou zadány svými intervaly neurčitosti. Uvedená problematika vzniká při řešení praktických úloh vedoucích na soustavy lineárních rovnic, jejichž koeficienty, získané měřením nebo odhadem, nelze považovat za přesné veličiny, a je nutno vycházet pouze ze znalosti intervalů, ve kterých jejich skutečné hodnoty leží (viz např. [2]). Předpokládáme přitom, že rozložení pravděpodobnosti každého koeficientu na jeho intervalu neurčitosti je rovnoměrné a nezávislé na ostatních koeficientech. Definujeme-li přirozeným způsobem pojem nezáporného řešení takové soustavy, můžeme množinu nezáporných řešení popsat soustavou lineárních nerovností s konstantními koeficienty (věta 1). Dále uvádíme aplikaci tohoto výsledku na soustavy n lineárních rovnic o n neznámých a na úlohu lineárního programování.

Nechť je dána soustava

$$\mathbf{A}x = b \,, \tag{0}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice typu $m \times n$ a o koeficientech této soustavy je známo pouze to, že pro všechna i, j leží ij-tý prvek matice $\mathbf{A}$ v intervalu $\langle a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)} \rangle$ a i-tá složka vektoru b v intervalu $\langle b_i^{(1)}, b_i^{(2)} \rangle$, kde $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, b_i^{(1)}, b_i^{(2)}$ jsou daná čísla, $a_{ij}^{(1)} \leqq a_{ij}^{(2)}$, $b_i^{(1)} \leqq b_i^{(2)}$ pro všechna i, j. Položme

$$\mathbf{A}_1 = (a_{ij}^{(1)})_{i=1,j=1}^{m}{}^{n} \,, \quad \mathbf{A}_2 = (a_{ij}^{(2)})_{i=1,j=1}^{m}{}^{n} \,,$$
$$b_1 = (b_i^{(1)})_{i=1}^{m} \,, \qquad b_2 = (b_i^{(2)})_{i=1}^{m} \,.$$

Potom můžeme původní soustavu zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{A}x &= b \,, \\ \mathbf{A}_1 \leqq \mathbf{A} &\leqq \mathbf{A}_2 \,, \\ b_1 \leqq b &\leqq b_2 \,, \end{aligned} \tag{1}$$

kde $\mathbf{A}_1 \leqq \mathbf{A}_2$, $b_1 \leqq b_2$ a maticovou resp. vektorovou nerovnost chápeme v obvyklém smyslu. Vycházíme-li z předpokladu o rovnoměrném a vzájemně nezávislém rozložení pravděpodobnosti všech koeficientů, je přirozené považovat za nezáporné řešení soustavy (1) každý nezáporný vektor x, který splňuje rovnost (0) pro jisté hodnoty koeficientů v rámci stanovených intervalů. Množinou nezáporných řešení soustavy (1) nazveme tedy množinu

$$M = \{\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \; ; \text{ existují } \mathbf{A}, \boldsymbol{b} \text{ tak, že } \mathbf{A}_1 \leqq \mathbf{A} \leqq \mathbf{A}_2, \boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{b} \leqq \boldsymbol{b}_2, \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\} .$$

Ukazuje se, že množinu M je možno popsat soustavou lineárních nerovností s konstantními koeficienty a pro každé nezáporné řešení $\boldsymbol{x}$ této soustavy stanovit matici $\mathbf{A}$ a vektor $\boldsymbol{b}$ tak, že platí (1). Výsledek je pro přehlednost rozdělen do dvou vět. Povšimněme si, že na matice $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ a vektory $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ nejsou kladeny žádné dodatečné předpoklady.

Věta 1. Vektor $\boldsymbol{x}$ je nezáporným řešením soustavy (1), právě když je nezáporným řešením soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\boldsymbol{x} &\leqq \boldsymbol{b}_2 \, , \\ \boldsymbol{b}_1 &\leqq \mathbf{A}_2\boldsymbol{x} \, . \end{aligned} \tag{2}$$

Věta 2. Nechť $\boldsymbol{x}$ je nezáporným řešením soustavy (2). Nechť $\boldsymbol{w} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1$ a nechť pro $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$,

$$t_i = \begin{cases} 0, & \text{je-li } w_i = 0 \, , \\ (\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{x})_i / w_i \, , & \text{je-li } w_i \neq 0 \, , \end{cases}$$

$$a_{ij} = a_{ij}^{(1)} + t_i(a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)}) \, ,$$

$$b_i = b_i^{(2)} + t_i(b_i^{(1)} - b_i^{(2)})$$

a dále nechť

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m \; n} \, ,$$

$$\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^{m} \, .$$

Potom je $\mathbf{A}_1 \leqq \mathbf{A} \leqq \mathbf{A}_2$, $\boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{b} \leqq \boldsymbol{b}_2$ a platí

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \, .$$

Obě věty dokážeme společně.

Důkaz. Nechť vektor $\boldsymbol{x}$ je nezáporným řešením soustavy (1). Potom existuje matice $\mathbf{A}$ a vektor $\boldsymbol{b}$ tak, že $\mathbf{A}_1 \leqq \mathbf{A} \leqq \mathbf{A}_2$, $\boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{b} \leqq \boldsymbol{b}_2$, $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Z nezápornosti vektoru $\boldsymbol{x}$ plyne

$$\mathbf{A}_1\boldsymbol{x} \leqq \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \leqq \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leqq \mathbf{A}_2\boldsymbol{x} \, ,$$

tedy $\boldsymbol{x}$ je nezáporným řešením soustavy (2).

Naopak nechť $\boldsymbol{x}$ je nezáporným řešením soustavy (2). Definujme vektor $\boldsymbol{w}$ a čísla t_i, a_{ij}, b_i, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ tak, jak je uvedeno ve větě 2. Potom je $\boldsymbol{w} = (\mathbf{A}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{x}) \geqq \boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$, což znamená, že pro každé $i = 1, \ldots, m$ je $w_i \geqq (\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{x})_i \geqq 0$ a tedy $0 \leqq t_i \leqq 1$. Z toho plyne, že pro všechna i, j je $a_{ij} \in \langle a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)} \rangle$, $b_i \in \langle b_i^{(1)}, b_i^{(2)} \rangle$, takže položíme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{b} = (b_i)$, je $\mathbf{A}_1 \leqq \mathbf{A} \leqq \mathbf{A}_2$, $\boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{b} \leqq \boldsymbol{b}_2$. Rovnost $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dokážeme po složkách. Nechť $1 \leqq i \leqq m$. Dokážeme nejprve, že

$$(*) \qquad t_i[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1]_i = (\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{x})_i\,.$$

Je-li $[(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1]_i \neq 0$, plyne tato rovnost z definice čísla t_i. V opačném případě je $t_i = 0$ a z nezápornosti vektorů $\mathbf{A}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{x}$ plyne, že $(\mathbf{A}_2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_1)_i = (\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_1\boldsymbol{x})_i = 0$, takže v tomto případě jsou obě strany v (*) rovny nule. Po rozepsání a úpravě rovnosti (*) dostáváme

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}^{(1)} + t_i(a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)}))\,x_j = b_i^{(2)} + t_i(b_i^{(1)} - b_i^{(2)})$$

a tedy podle definice čísel a_{ij}, b_i

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,.$$

Protože i bylo zvoleno libovolně, je $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a důkaz věty 2 je ukončen. Současně je tím dokázána i obrácená implikace z věty 1.

Zřejmým důsledkem věty 1 je toto tvrzení:

Věta 3. Množina nezáporných řešení soustavy (1) je konvexní polyedrická množina.

Při řešení soustavy (1) vystupují do popředí dvě otázky: existence nezáporného řešení a určení intervalů, ve kterých se pohybují složky nezáporných řešení. Na základě věty 1 je možno obě tyto úlohy řešit klasickými metodami lineárního programování. Např. řešení druhé úlohy dostaneme řešením úloh

$$\min\{x_j;\, \boldsymbol{x} \in M\}\,, \quad \max\{x_j;\, \boldsymbol{x} \in M\}\,,$$

kde

$$M = \{\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0};\, \mathbf{A}_1\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_1 \leqq \mathbf{A}_2\boldsymbol{x}\}$$

pro $j = 1, \ldots, n$.

Uvedeme dvě aplikace věty 1.

A. Řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých s intervalově zadanými koeficienty. Jde o zvláštní případ soustavy (1), kdy matice $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ jsou čtvercové, a proto o něm platí vše, co bylo řečeno výše. Za určitých předpokladů lze však podat řešení obou úloh, zmíněných v předchozím odstavci, v explicitním tvaru:

Věta 4. Nechť $\mathbf{A}_1^{-1} \geqq \mathbf{0}$. Potom soustava (2) má nezáporné řešení, právě když $\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 \geqq \mathbf{0}$. Je-li tato podmínka splněna, je vektor $\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2$ nezáporným řešením této soustavy.

Důkaz. Nechť soustava (2) má nezáporné řešení $\boldsymbol{x}$. Vynásobením nerovnosti $\mathbf{A}_1\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}_2$ zleva nezápornou maticí $\mathbf{A}_1^{-1}$ dostáváme $\boldsymbol{x} \leqq \mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2$, tedy $\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 \geqq \mathbf{0}$. Nechť naopak $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 \geqq \mathbf{0}$. Potom $\mathbf{A}_1\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}_2$ a k dokončení důkazu stačí ukázat, že $\boldsymbol{b}_1 \leqq \mathbf{A}_2\boldsymbol{x}_0$. Je $\mathbf{A}_2\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\,\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_2 \geqq \boldsymbol{b}_2 \geqq \boldsymbol{b}_1$, cbd.

Věta 5. Nechť $\mathbf{A}_1^{-1} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_2^{-1} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1 \geqq \mathbf{0}$. Potom pro každé nezáporné řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (2) platí

$$\mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{x} \leqq \mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2$$

a obě hranice jsou přesné.

Důkaz. První část tvrzení plyne z (2) vynásobením první, resp. druhé nerovnosti zleva nezápornou maticí $\mathbf{A}_1^{-1}$, resp. $\mathbf{A}_2^{-1}$. Vektor $\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2$ je nezáporným řešením soustavy (2) podle věty 4. Nechť $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1$, potom $\mathbf{A}_2\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1$ a zbývá dokázat, že $\mathbf{A}_1\boldsymbol{x}_1 \leqq \boldsymbol{b}_2$. Je však $\mathbf{A}_1\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_1 - (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{b}_1 \leqq \boldsymbol{b}_2$, čímž je důkaz proveden.

Použijeme-li normu vektoru $\|\boldsymbol{x}\| = \max_j |x_j|$, je za předpokladů věty 5 číslo $\|\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1\|$ vhodnou číselnou charakteristikou „velikosti“ množiny nezáporných řešení soustavy (2), resp. (1). Horní odhad tohoto čísla je uveden v další větě. Používáme normu matice $\|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

Věta 6. Nechť jsou splněny předpoklady věty 5 a $\|\mathbf{A}_1^{-1}\| \leqq K$, $\|\boldsymbol{b}_2\| \leqq L$. Potom

$$\|\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1\| \leqq LK^2\|\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1\| + K\|\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1\| .$$

Důkaz. Z rovnosti $\mathbf{A}_1^{-1} - \mathbf{A}_2^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{A}_2^{-1}$ plyne za našich předpokladů, že $\mathbf{A}_1^{-1} \geqq \mathbf{A}_2^{-1} \geqq \mathbf{0}$, tedy $\|\mathbf{A}_2^{-1}\| \leqq \|\mathbf{A}_1^{-1}\| \leqq K$. Potom je

$$\|\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 - \mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1\| = \|\mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1)\mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_2 + \mathbf{A}_2^{-1}(\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1)\| \leqq$$
$$\leqq LK^2\|\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1\| + K\|\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_1\| .$$

Předpoklady věty 5 jsou speciálně splněny u soustav leontiefského typu, což umožňuje použít uvedené věty k intervalové analýze Leontiefova modelu. Některé výsledky v tomto směru jsou uvedeny v práci [1], odkud je vzat i následující příklad.

Příklad. Je třeba určit intervaly, ve kterých se pohybují složky nezáporných řešení soustavy (1), kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}79 & -0{,}202 \\ -0{,}51 & 0{,}895 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}81 & -0{,}198 \\ -0{,}49 & 0{,}905 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 6{,}6 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}.$$

Zde je

$$\mathbf{A}_1^{-1} \geqq \mathbf{0}\,, \mathbf{A}_2^{-1} \geqq \mathbf{0}\,,$$
$$\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 11{,}9 \\ 9{,}3 \end{pmatrix} \geqq \mathbf{0}\,,$$
$$\mathbf{A}_2^{-1}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 9{,}8 \\ 7{,}2 \end{pmatrix} \geqq \mathbf{0}\,.$$

Pro složky vektoru nezáporných řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ platí proto podle věty 5 přesné odhady

$$9,8 \leqq x_1 \leqq 11,9$$
$$7,2 \leqq x_2 \leqq 9,3 .$$

B. Aplikace v lineárním programování. Mějme úlohu

$$(3) \qquad \max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{A}_1 \leqq \mathbf{A} \leqq \mathbf{A}_2,\ \mathbf{b}_1 \leqq \mathbf{b} \leqq \mathbf{b}_2,\ \mathbf{c}_1 \leqq \mathbf{c} \leqq \mathbf{c}_2\},$$

tedy úlohu lineárního programování, v níž některé nebo všechny koeficienty jsou zadány pouze svými intervaly neurčitosti, přičemž v rámci těchto intervalů nejsou žádné hodnoty preferovány a všechna přípustná nezáporná řešení považujeme za rovnocenná. Použitím věty 1 můžeme úlohu (3) převést na ekvivalentní úlohu

$$\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in M,\ \mathbf{c}_1 \leqq \mathbf{c} \leqq \mathbf{c}_2\}$$

a uvážíme-li, že pro každé nezáporné řešení $\mathbf{x}$ je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leqq \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}$, je úloha (3) převedena na klasickou úlohu lineárního programování:

Věta 7. Úloha (3) je ekvivalentní úloze lineárního programování

$$\max\{\mathbf{c}_2^T\mathbf{x};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1 \leqq \mathbf{A}_2\mathbf{x}\}.$$

Literatura

[1] Bouška, J., Rohn, J.: Řešení jedné úlohy na strukturním modelu při intervalovém zadání parametrů a konstant. Sborník IV. celostátní konference o matematických metodách v ekonomii. Harmónia 1974. EML, Praha 1975, s. 135—156.

[2] Moore, R. E.: Interval Analysis. Prentice-Hall, London 1966.

Došlo 27. října 1975.

Jiří Rohn, Matematicko-fyzikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.

Summary

SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WITH INEXACT DATA

Jiří Rohn

The article deals with a linear system

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

($\mathbf{A}$ of arbitrary type) whose coefficients are intervals. The set of nonnegative solutions of this system is described by a system of linear inequalities. Two applications of this result are given.