# Optimalizace produkce mléka

JIŘÍ ROHN

Během tzv. zimního krmného období (říjen—květen) jsou dojnice krmeny ve stájích směsí různých rostlinných produktů a vyvstává otázka sestavení krmné dávky, která by poskytovala maximální dojivost. Z řešení tohoto problému, které zde uvádíme, je patrné, že nejde o klasický nutriční problém (viz např. [1]), nýbrž o otázku rovnoměrného čerpání zdrojů.

Výživná hodnota krmné dávky pro dojnice je závislá na obsahu různých živin, z nichž rozhodující pro náš problém jsou stravitelné dusíkaté látky (bílkoviny; používá se zkratka SNL) a škrobové jednotky (glycidy; zkr. ŠJ). Podle ČSN 46 7070 „Potřeba živin hospodářských zvířat" je potřeba SNL a ŠJ v denní krmné dávce na dojivost $d$ kg mléka dojnicí o hmotě $Q$ (v tunách) dána čísly

$$N_{\mathrm{SNL}} = \alpha_1 Q + \beta_1 d \quad [\mathrm{kg}]\,, \tag{1.1}$$

$$N_{\mathrm{SJ}} = \alpha_2 Q + \beta_2 d \quad [\mathrm{ŠJ}]\,, \tag{1.2}$$

kde $\alpha_i$, $\beta_i$, $i = 1, 2$, jsou jisté kladné koeficienty, jejichž hodnoty jsou uvedeny v citované normě. Těmto vzorcům je třeba rozumět tak, že obsahuje-li denní krmná dávka $P$ kg stravitelných dusíkatých látek a $R$ škrobových jednotek, je denní produkce mléka rovna

$$d = \min\left(\frac{P - \alpha_1 Q}{\beta_1}, \frac{R - \alpha_2 Q}{\beta_2}\right) \quad [\mathrm{kg}] \tag{2}$$

(číslo $d$ může být i záporné, nepokrývá-li krmná dávka potřebu živin pro záchovnou dávku dojnice).

Krmná dávka je tvořena směsí krmiv, kterou lze rozdělit do tří skupin: na objemná, jadrná a doplňková krmiva.

1. Objemné krmivo je konzervovaná zelená píce (siláž, senáž), uskladněná v jamách (s kapacitou řádově stovek tun), které se během zimního krmného období postupně otevírají a zkrmují. Předpokládáme, že těchto jam je $n$, $n \geqq 1$, že jsou označeny pořadovými čísly $1, \ldots, n$ a že v $i$-té jámě je uskladněno $H_i$ kg krmiva s obsahem $\pi_i$ kg SNL a $\varrho_i$ ŠJ v 1 kg krmiva, přičemž $\pi_i > 0$, $\varrho_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

2. Jadrné krmivo („jádro") je krmná směs, vyráběná průmyslově na bázi obilovin, která v 1 kg obsahuje $p_0$ kg SNL a $r_0$ ŠJ, $p_0 > 0$, $r_0 > 0$. Vzhledem k omezeným zdrojům obilovin je spotřeba jadrného krmiva vázána vyhláškou ministerstva země-

dělství a výživy na dosaženou produkci mléka tak, že průměrná spotřeba tohoto krmiva na 1 kg vyprodukovaného mléka nesmí za celé zimní krmné období překročit hodnotu $a$ kg (v současné době $a = 0{,}25$). Přitom $0 < a < \min(\beta_1/p_0, \beta_2/r_0)$.

3. Zbývajícími komponentami krmné dávky jsou tzv. doplňková krmiva, kterých má statek, resp. JZD k disposici určité pevně dané množství a jejichž čerpání není vázáno na výši produkce. Předpokládáme, že doplňkových krmiv je $s$, $s \geqq 0$, a že pro $j = 1, \ldots, s$ činí zásoba $j$-tého doplňkového krmiva $M_j$ kg a obsahy SNL, ŠJ v 1 kg tohoto krmiva jsou dány nezápornými čísly $p_j$, $r_j$.

Uvedenými krmivy je třeba krmit $D$ dojnic o stejné hmotě $Q$ (stájový průměr) po dobu $T$ dní ($T$ celé). Přitom je třeba respektovat některé technologické požadavky. Celkové krmné období délky $T$ je složeno z částečných krmných období navazujících na sebe. Každé částečné krmné období je charakterizováno tím, že se v něm používá stejného objemného krmiva, takže začíná otevřením některé jámy s objemným krmivem a končí vyčerpáním téže nebo jiné jámy; v každém částečném krmném období mohou být otevřeny nejvýše dvě jámy. Např. v případě, že v některém částečném krmném období jsou otevřeny právě dvě jámy, krmí se z obou jam současně tak dlouho, dokud se některá z nich nevyčerpá, potom se krmí dále buď ze zbylé jámy, nebo se k ní otevře další jáma a krmí se opět jejich kombinací. Možnost současného použití dvou jam je vyvolána nutností vyrovnat často dosti kolísající obsahy živin v jamách, v nichž jsou uskladněna rostlinná krmiva různého druhu a kvality. V každém částečném krmném období se denní dávka z objemných krmiv doplňuje potřebným množstvím krmiv ze skupin 2 a 3. Zásadním požadavkem je, aby se během částečného krmného období neměnilo složení krmné dávky a bylo pro všechny dojnice stejné. Délky částečných krmných období nemusí být vyjádřeny celými čísly a ve dnech, v nichž se stýkají dvě částečná krmná období, se krmí kombinací obou krmných dávek.

Dojivost $d$ nazýváme dosažitelnou, jestliže existuje rozpis krmných dávek na celkové krmné období délky $T$, při kterém dává každá dojnice denně $d$ kg mléka a nedochází k překročení kapacit zdrojů krmiv, jak byly popsány v bodech 1–3. Označíme-li $P_h^*$, resp. $R_h^*$ množství SNL resp. ŠJ v krmné dávce v $h$-tém částečném krmném období, je dojivost $d$ podle (2) dosažitelná, právě když pro každé $h$ je

$$
\begin{aligned}
P_h^* &\geqq \alpha_1 Q + \beta_1 d\,, \\
R_h^* &\geqq \alpha_2 Q + \beta_2 d
\end{aligned}
\tag{3}
$$

a aspoň v jedné z těchto dvou nerovností platí rovnost.

Naším cílem je nalezení maximální dosažitelné dojivosti $d_{\max}$. Vzorec pro její výpočet je uveden v následující větě, v jejímž důkazu je popsána metoda sestavení rozpisu krmných dávek, při němž je této dojivosti dosaženo.

*Věta.* Za uvedených předpokladů a označení je

$$
d_{\max} = \min\left(\frac{p + \sum_1^s p_j m_j - \alpha_1 Q}{\beta_1 - p_0 a}, \frac{r + \sum_1^s r_j m_j - \alpha_2 Q}{\beta_2 - r_0 a}\right),
\tag{4}
$$

kde

$$p = \frac{\sum_1^n \pi_i H_i}{DT}, \quad r = \frac{\sum_1^n \varrho_i H_i}{DT}, \quad m_j = \frac{M_j}{DT}, \quad j = 1, \ldots, s.$$

*Důkaz.* 1. Nechť $d$ je dosažitelná dojivost. Ukážeme, že $d \leqq d_{\max}$. Nechť se celkové krmné období, při kterém je dosaženo dojivosti $d$, skládá z $q$ částečných krmných období. Pro $h$-té částečné krmné období, $h = 1, \ldots, q$, označme $T_h$ délku tohoto období, $P_h$, resp. $R_h$ množství SNL, resp. ŠJ, dodávané do denní krmné dávky z objemných krmiv a $y_0^h$, $y_j^h$, $j = 1, \ldots, s$, množství jadrného a doplňkových krmiv v krmné dávce. Podle (3) potom platí

$$P_h + p_0 y_0^h + \sum_1^s p_j y_j^h \geqq \alpha_1 Q + \beta_1 d, \tag{5.1}$$

$$R_h + r_0 y_0^h + \sum_1^s r_j y_j^h \geqq \alpha_2 Q + \beta_2 d, \quad h = 1, \ldots, q. \tag{5.2}$$

Vynásobením (5.1) číslem $DT_h$ a sečtením pro $h = 1, \ldots, q$ dostáváme

$$\sum_1^q DP_h T_h + p_0 \sum_1^q D y_0^h T_h + \sum_1^s p_j \sum_1^q D y_j^h T_h \geqq (\alpha_1 Q + \beta_1 d)\, DT.$$

Avšak $\sum_1^q DP_h T_h$ je celkové množství SNL, dodaných z objemných krmiv, a proto musí být

$$\sum_1^q DP_h T_h \leqq \sum_1^n \pi_i H_i,$$

analogicky musí platit

$$\sum_1^q D y_0^h T_h \leqq a d DT, \quad \sum_1^q D y_j^h T_h \leqq M_j, \quad j = 1, \ldots, s,$$

tedy

$$\sum_1^n \pi_i H_i + p_0 a d DT + \sum_1^s p_j M_j \geqq (\alpha_1 Q + \beta_1 d)\, DT$$

a odtud vydělením $DT$

$$p + p_0 a d + \sum_1^s p_j m_j \geqq \alpha_1 Q + \beta_1 d. \tag{6.1}$$

Analogickým postupem odvodíme z (5.2) nerovnost

$$r + r_0 a d + \sum_1^s r_j m_j \geqq \alpha_2 Q + \beta_2 d. \tag{6.2}$$

Jelikož $a < \min(\beta_1/p_0, \beta_2/r_0)$, plyne z (6.1), (6.2)

$$d \leqq \min\left(\frac{p + \sum_1^s p_j m_j - \alpha_1 Q}{\beta_1 - p_0 a}, \frac{r + \sum_1^s r_j m_j - \alpha_2 Q}{\beta_2 - r_0 a}\right) = d_{\max}.$$

2. Dokážeme, že dojivost $d_{\max}$ je dosažitelná. Z (4) plyne, že

$$p + p_0 a d_{\max} + \sum_1^s p_j m_j \geqq \alpha_1 Q + \beta_1 d_{\max}\,, \tag{7.1}$$

$$r + r_0 a d_{\max} + \sum_1^s r_j m_j \geqq \alpha_2 Q + \beta_2 d_{\max} \tag{7.2}$$

a aspoň v jedné z těchto nerovností platí rovnost. Existuje-li rozpis čerpání jam, který poskytuje krmné období délky $T$ a při němž se z objemných krmiv dodává do každé denní krmné dávky právě $p$ kg SNL a $r$ ŠJ, je dojivost $d_{\max}$ dosažitelná, neboť v tom případě podle (3), (7.1), (7.2) stačí dodat do každé denní krmné dávky konstantní množství $ad_{\max}$ jádra a $m_j$ doplňků, $j = 1, \ldots, s$; přitom zdroje nebudou překročeny.

Sestrojíme rozpis uvedených vlastností. Nechť $u_0 = r/p$ a pro $i = 1, \ldots, n$ položme $u_i = \varrho_i/\pi_i$, $k_i = p/\pi_i$. Dále nechť $A = \{i; u_i < u_0\}$, $B = \{i; u_i > u_0\}$, $C = \{i; u_i = u_0,\ i = 1, \ldots, n\}$. Potom $A \neq \emptyset$, právě když $B \neq \emptyset$. Předpokládejme např., že $A \neq \emptyset$ a $B = \emptyset$. Potom pro každé $i$, $1 \leqq i \leqq n$, je $u_i \leqq u_0$ a existuje $i_0 \in A$, že $u_{i_0} < u_0$, tedy $DTr = \sum_1^n \varrho_i H_i < u_0 \sum_1^n \pi_i H_i = u_0 DTp$, což je spor, neboť $r/p = u_0$. Analogicky v případě, že $A = \emptyset$ a $B \neq \emptyset$. Nejprve se bude krmit tak, aby v každém částečném krmném období byla otevřena jedna jáma z množiny $A$ a jedna z množiny $B$ (pokud ovšem $A \neq \emptyset$), přičemž se jámy budou postupně otevírat v pořadí svých čísel (např. dobere-li se jáma z množiny $A$, otevře se dosud nepoužitá jáma z této množiny s nejnižším pořadovým číslem a krmí se z ní v kombinaci se zbytkem jámy z množiny $B$ apod.). Při kombinaci jámy $i \in A$ s jámou $j \in B$ dodáme do denní krmné dávky z jámy $i$ množství krmiva

$$x_1^{ij} = k_i \frac{u_j - u_0}{u_j - u_i}$$

a z jámy $j$ množství krmiva

$$x_2^{ij} = k_j \frac{u_0 - u_i}{u_j - u_i}\,.$$

Jestliže v prvním dnu tohoto částečného krmného období je část krmné dávky pokryta předchozí kombinací a zbývá dodat krmení na $t$ dne, $0 < t < 1$, dodají se množství $tx_1^{ij}$, $tx_2^{ij}$, podobně v posledním dnu. Doberou-li se uvedeným způsobem všechny jámy některé z množin $A$, $B$, krmí se dále jednotlivě z jam množiny $C$, otevíraných postupně opět podle velikosti pořadových čísel, přičemž z $l$-té jámy se do denní krmné dávky dodá množství krmiva

$$x^l = k_l$$

a v prvním nebo posledním dnu částečného krmného období příslušná úměrná část tohoto množství. Takto postupujeme, dokud nejsou vyčerpány všechny jámy množiny $C$. Je-li $A = \emptyset$ nebo $C = \emptyset$, příslušnou část postupu vynecháme. Uvedený postup čerpání jam má čtyři vlastnosti:

a) Dodávaná množství krmiv jsou vyjádřena kladnými čísly. Jelikož $k_i = p/\pi_i > 0$ pro $i = 1, \ldots, n$, je $x^l > 0$ pro každé $l \in C$. Je-li $i \in A$, $j \in B$, je $u_i < u_0 < u_j$ a tedy $x_1^{ij} > 0$, $x_2^{ij} > 0$.

b) Do každé denní krmné dávky se objemnými krmivy dodává $p$ kg SNL a $r$ ŠJ. Předpokládejme nejprve, že během příslušného dne nedochází ke změně částečného krmného období. Krmí-li se v tomto dni kombinací jam $i \in A$, $j \in B$, jsou dodávaná množství SNL, ŠJ rovna

$$\pi_i x_1^{ij} + \pi_j x_2^{ij} = p \frac{u_j - u_0}{u_j - u_i} + p \frac{u_0 - u_i}{u_j - u_i} = p\,,$$

$$\varrho_i x_1^{ij} + \varrho_j x_2^{ij} = p u_i \frac{u_j - u_0}{u_j - u_i} + p u_j \frac{u_0 - u_i}{u_j - u_i} = p u_0 = r\,.$$

Krmí-li se v tomto dni z jámy $l \in C$, dodávají se SNL, ŠJ v množství

$$\pi_l x^l = \pi_l k_l = p\,,$$

$$\varrho_l x^l = u_l \pi_l k_l = u_0 p = r\,.$$

Patří-li část příslušného dne velikosti $t$, $0 < t < 1$, do $h$-tého částečného krmného období a zbytek $1 - t$ dne do $(h + 1)$-ního částečného krmného období, dodávají se SNL, ŠJ v množství

$$pt + p(1 - t) = p\,,$$

$$rt + r(1 - t) = r\,,$$

cbd. Analogicky v případě, zasahuje-li do příslušného dne více částečných krmných období.

c) Množiny $A$, $B$ se vyčerpají současně. Předpokládejme sporem, že k okamžiku $T^*$ se vyčerpají např. všechny jámy z $A$ a zůstane jisté dosud nepoužité množství v jamách z $B$. Označme $P^*$, $R^*$ množství SNL, ŠJ, které zbývá v dosud nepoužitém krmivu z množiny $B$. Potom podle b) je

$$\sum_1^n \pi_i H_i = pDT = pDT^* + P^* + \sum_{i \in C} \pi_i H_i\,,$$

$$\sum_1^n \varrho_i H_i = u_0 pDT = u_0 pDT^* + R^* + \sum_{i \in C} u_0 \pi_i H_i\,,$$

z čehož plyne, že $R^*/P^* = u_0$, což je spor, neboť pro každé $j \in B$ je $u_j > u_0$ a tedy $R^*/P^* > u_0$.

d) Dosažené krmné období má délku $T$. Podle b) se každý den dodává $pD$ kg SNL, podle c) se spotřebuje všechno objemné krmivo. Pro dosaženou délku $T_0$ celkového krmného období tedy platí

$$pDT_0 = \sum_1^n \pi_i H_i = pDT\,,$$

tedy $T_0 = T$.

Tím jsme sestrojili rozpis čerpání jam s požadovanými vlastnostmi. Podle toho, co bylo řečeno na začátku bodu 2, je tím věta dokázána.

V zemědělské praxi se dosud mnohdy počítá s konstantními obsahy živin v objemných krmivech ($\pi_i$ = konst, $\varrho_i$ = konst) podle tabulkových hodnot, což vede ke značným výkyvům dojivosti během krmného období, které jsou nežádoucí jak z ekonomického, tak z fyziologického hlediska. Úlohu sestavit rozpis krmných dávek na celé zimní krmné období s využitím laboratorně zjištěných obsahů živin v jamách s objemným krmivem zformuloval poprvé oborový podnik Státní statky Tachov (v poněkud jiné formě, než jsme zde uvedli) a bývá proto někdy nazývána „tachovským problémem“ (viz [2]). Rozpis krmných dávek, uvedený v důkazu, má výhodu, že s výjimkou objemných krmiv je obsah všech dalších komponent krmné dávky konstantní během celého krmného období, což značně usnadňuje technologii krmení.

*Příklad* (podle údajů o.p. Státní statky Tachov). $\alpha_1 = 0{,}6$, $\beta_1 = 0{,}0625$, $\alpha_2 = 5{,}0$, $\beta_2 = 0{,}285$ (normy pro 4% tučnost mléka), $a = 0{,}25$, $p_0 = 0{,}116$ kg, $r_0 = 0{,}602$ ŠJ (krmná směs DOG), $s = 1$, $p_1 = 0$, $r_1 = 0{,}41$ ŠJ, $M_1 = 142{,}5$ t (melasa), $D = 742$ dojnic, $T = 240$ dnů, $Q = 0{,}55$ t. Parametry jam s objemným krmivem jsou uvedeny v tab. 1. Je $p = 0{,}72$ kg, $r = 3{,}86$ ŠJ, $m_1 = 0{,}8$ kg. Dosazením do vzorce (4) dostáváme $d_{\max} = 10{,}7$ kg. Protože $u_0 = 5{,}38$, je $A = \{4, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$, $C = \emptyset$. Rozpis krmných dávek pro dojivost $d_{\max}$ je uveden v tab. 2.

Tabulka 1. Parametry jam.

| $i$ | $\pi_i$ [kg] | $\varrho_i$ [ŠJ] | $10^{-3}H_i$ [kg] | $u_i$ [ŠJ/kg] | $k_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,024 | 0,151 | 678,2 | 6,29 | 29,88 |
| 2 | 0,024 | 0,160 | 296,1 | 6,67 | 29,88 |
| 3 | 0,028 | 0,169 | 602,0 | 6,04 | 25,61 |
| 4 | 0,031 | 0,123 | 600,0 | 3,97 | 23,13 |
| 5 | 0,032 | 0,147 | 247,0 | 4,59 | 22,41 |
| 6 | 0,023 | 0,168 | 370,8 | 7,30 | 31,17 |
| 7 | 0,054 | 0,213 | 632,0 | 3,94 | 13,28 |
| 8 | 0,032 | 0,225 | 571,1 | 7,03 | 22,41 |

**Tabulka 2. Rozpis částečných krmných období a denních krmných dávek pro dojivost $d_{\max}$.**

| $h$ | $T_h$ [dny] | $i$ | $j$ | $x_1^{ij}$ [kg] | $x_2^{ij}$ [kg] | jádro [kg] | Melasa [kg] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 50,3 | 4 | 1 | 9,1 | 18,2 | 2,67 | 0,8 |
| 2 | 25,5 | 4 | 2 | 11,0 | 15,6 | 2,67 | 0,8 |
| 3 | 9,7 | 4 | 3 | 7,3 | 17,5 | 2,67 | 0,8 |
| 4 | 32,7 | 5 | 3 | 10,2 | 14,0 | 2,67 | 0,8 |
| 5 | 10,5 | 7 | 3 | 4,2 | 17,6 | 2,67 | 0,8 |
| 6 | 37,5 | 7 | 6 | 7,6 | 13,3 | 2,67 | 0,8 |
| 7 | 73,8 | 7 | 8 | 7,1 | 10,4 | 2,67 | 0,8 |

# Literatura

[1] Юдин, Д. Б., Гольштейн, Е. Г.: Задачи и методы линейного программирования. Советское радио, Москва 1961.
[2] Rous, J., Stašek, Č.: Centrální řízení výživy skotu v rámci oborového podniku Státní statky Tachov, sborník „Počítače v živočišné výrobě". Agroplan, Praha 1976.

*Došlo 18. března 1977.*

RNDr. Jiří Rohn, Matematicko-fyzikální fakulta KU, Malostranské nám. 25, 118 00 Praha 1.

# Summary

## MILK PRODUCTION OPTIMIZATION

*Jiří Rohn*

The problem solved in this article is how to feed milk cows with respect to the limited resources of fodders in order to maximize milk production. An expression for the optimal value and a method for construction of the optimal fodder combination are given.