CVIČENÍ Z MATEMATIKY

pro I. ročník chemie a biologie

Vlastimil Mikoláš, Jiří Rohn

UNIVERSITA KARLOVA • PRAHA

CVIČENÍ Z MATEMATIKY

pro I. ročník
chemie a biologie

Praha 1977

Katedra fyzikální chemie přírodovědecké fakulty
Univerzity Karlovy

Vedoucí : doc.RNDr. Jiří Dvořák, CSc.

Předmluva

Tato skripta jsou určena posluchačům 1. ročníku studia biologických a chemických oborů na přírodovědecké fakultě KU jako pomůcka ke cvičení z matematiky a mají sloužit k procvičení látky, probírané na přednášce. Látka je rozdělena do kapitol, odpovídajících jednotlivým typům příkladů. V každé kapitole je uveden přehled používaných vzorců a popis postupu výpočtu, který je ilustrován na větším počtu řešených příkladů. Dále následuje seznam příkladů, určených k samostatnému výpočtu, jejichž výsledky jsou uvedeny na konci skript. U obtížnějších příkladů, označených hvězdičkou, je v samostatné části, umístěné před seznamem výsledků, uveden návod k řešení.

Věty, používané při výpočtu, jsou uvedeny pouze ve formě vzorců, protože se předpokládá, že posluchač je s nimi již obeznámen z přednášky, kterou tato skripta v žádném případě nemohou nahradit. Vzhledem k tomu, že účelem těchto skript je především osvojení početní techniky, byl počet slovních příkladů omezen na minimum.

Autoři

O b s a h :

I

PŘÍKLADY

1. D e r i v a c e

Derivace elementárních funkcí jsou shrnuty v následující tabulce:

$$c' = 0 \qquad (\sin x)' = \cos x$$
$$x' = 1 \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(x^a)' = a x^{a-1} \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(a^x)' = a^x \log a \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \log a} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Povšimněte si, že derivace odmocnin jsou zahrnuty ve vzorci pro $(x^a)'$. Např. $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pro derivace součtu, rozdílu, součinu, podílu a násobení konstantou platí tyto věty:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x), \qquad k \text{ konstanta.}$$

Ve všech těchto větách se derivace složitější funkce převádí na derivace jednodušších funkcí, z nichž je sestavena. Příklady: (stanovení definičních oborů přenecháváme zde i v dalším čtenáři).

Příklad 1. $(x^4 + \operatorname{tg} x)' = (x^4)' + (\operatorname{tg} x)' = 4x^3 + \frac{1}{\cos^2 x}$.

Příklad 2. $(\log x - \arcsin x)' = (\log x)' - (\arcsin x)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Příklad 3. $(e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$.

Příklad 4. $\left(\frac{arctg\,x}{x}\right)' = \frac{(arctg\,x)'x - arctg\,x\,(x)'}{x^2} =$

$= \frac{\frac{1}{1+x^2}x - arctg\,x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\,arctg\,x}{x^2(1+x^2)}.$

Příklad 5. $(3\sqrt[4]{x^3})' = (3x^{\frac{3}{4}})' = 3(x^{\frac{3}{4}})' = 3\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{9}{4\sqrt[4]{x}}.$

Vyskytuje-li se ve funkci více operací, postupujeme analogicky:

Příklad 6. $(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)' = (x^3)' - (2x^2)' + (3x)' + (1)' = 3x^2 - 4x + 3.$

Příklad 7. $(xe^x\log x)' = (x)'e^x\log x + x(e^x\log x)' = e^x\log x +$
$+ x((e^x)'\log x + e^x(\log x)') = e^x(\log x + x\log x + 1).$

Pro derivaci složené funkce platí věta:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Slovně můžeme postup derivování složené funkce vyjádřit takto: Nejprve zderivujeme vnější funkci jako tabulkovou funkci s jednoduchým argumentem, a do výsledku dosadíme za argument celou vnitřní funkci. Takto získanou funkci pak znásobíme derivací vnitřní funkce. Příklady:

Příklad 8. Máme vypočítat $(\log\sin x)'$. Zde je vnější funkce $\log$, vnitřní $\sin$. Zderivujeme vnější funkci jako funkci s jednoduchým argumentem $\log y$, tím dostaneme $\frac{1}{y}$, a do výsledku dosadíme za y vnitřní funkci $\sin x$. Získáme tak funkci $\frac{1}{\sin x}$, kterou vynásobíme derivací vnitřní funkce $(\sin x)' = \cos x$. Výsledek:
$(\log\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \cot g\,x.$

Příklad 9. Máme vypočítat $(arctg\,x^5)'$. Vnitřní funkce je x^5, vnější $arctg$, vnější funkce s jednoduchým argumentem je $arctg\,y$ její derivace $\frac{1}{1+y^2}$, po dosazení x^5 za y dostáváme $\frac{1}{1+(x^5)^2} =$ $= \frac{1}{1+x^{10}}$ a tuto funkci vynásobíme derivací vnitřní funkce $(x^5)' = 5x^4$. Výsledek: $(arctg\,x^5)' = \frac{1}{1+x^{10}}\cdot 5x^4 = \frac{5x^4}{1+x^{10}}.$

Příklad 10. $((tg\,x)^2)'$. Zde je vnější funkce druhá mocnina, vnitřní tg, tedy

$((\mathrm{tg}\,x)^2)' = 2\,\mathrm{tg}\,x\,(\mathrm{tg}\,x)' = 2\,\mathrm{tg}\,x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}.$

<u>Příklad 11.</u> $(e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\,e^{\cos x} \sin x$

<u>Příklad 12.</u> $(\sqrt{\arcsin x}\,)' = ((\arcsin x)^{\frac{1}{2}}\,)' = \frac{1}{2}\,(\arcsin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot$
$\cdot (\arcsin x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}.$

<u>Příklad 13.</u> Jde-li o vícenásobně složenou funkci, postupujeme obdobně. Máme-li např. zderivovat funkci $\mathrm{arctg}\,\cos x^2$, rozložíme ji nejprve na vnější funkci arctg a vnitřní funkci $\cos x^2$. Tím dostáváme $(\mathrm{arctg}\,\cos x^2)' = \frac{1}{1+(\cos x^2)^2} \cdot (\cos x^2)'.$
K výpočtu $(\cos x^2)'$ použijeme opět věty o derivaci složené funkce: je $(\cos x^2)' = -\sin x^2 \cdot (x^2)' = -\,2x \cdot \sin x^2$. Výsledek:
$(\mathrm{arctg}\,\cos x^2)' = -\frac{2x\,\sin x^2}{1+(\cos x^2)^2}.$

Vyskytuje-li se v zadání funkce více operací (součet, rozdíl, součin, podíl, složená funkce), není někdy na první pohled jasné, derivací které operace máme začít. V takovém případě se řídíme tímto pravidlem : <u>Začínáme vždy derivací té operace, která se při výpočtu funkční hodnoty počítá jako poslední.</u> K tomuto účelu můžeme např. dosadit do funkce libovolnou hodnotu z jejího definičního oboru a zjistit, která operace se při výpočtu této funkční hodnoty provádí jako poslední. Příklady:

<u>Příklad 14.</u> $(\sin x + x \cdot \log x)'$. Při výpočtu funkční hodnoty (můžeme dosadit např. $x = 2$) se počítá nejprve součin, potom součet. Začínáme tedy vzorcem pro derivaci součtu: $(\sin x + x \cdot \log x)' =$
$= (\sin x)' + (x \cdot \log x)' = \cos x + (x)' \log x + x(\log x)' = \cos x + \log x + 1.$

<u>Příklad 15.</u> $\left(\log \frac{x+1}{x-1}\right)'$. Při výpočtu funkční hodnoty počítáme nejprve $x+1$ a $x-1$, potom $\frac{x+1}{x-1}$, nakonec $\log \frac{x+1}{x-1}$. Začínáme proto derivací složené funkce: $\left(\log \frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$

$$= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{2}{1-x^2}.$$

Příklad 16. $\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - 3\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)' = \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' -$

$$-3\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)' = \frac{(\arcsin x)'\sqrt{1-x^2} - \arcsin x\,(\sqrt{1-x^2})'}{(\sqrt{1-x^2})^2} -$$

$$-\,3\,\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^2}\cdot\frac{(\sqrt{1+x^2})'\cdot x - \sqrt{1+x^2}\cdot(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{1 - \arcsin x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - 3\cdot\frac{1}{1+\frac{1+x^2}{x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\cdot x - \sqrt{1+x^2}}{x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} - 3\cdot\frac{x^2}{2x^2+1}\cdot\frac{(-1)}{x^2\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{3}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Pro výpočet derivace funkce $f(x)^{g(x)}$, kde $f(x) > 0$, upravíme tuto funkci nejprve použitím vzorce $z = e^{\log z}$ na tvar $f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}$. Funkci $e^{g(x)\log f(x)}$ zderivujeme pak obvyklým způsobem jako složenou funkci.

Příklad 17. $(x^x)'$. Protože $x^x = e^{\log x^x} = e^{x\log x}$,

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(x\log x)' = e^{x\log x}(\log x + 1) =$$

$$= x^x(\log x + 1).$$

Cvičení

Derivujte následující funkce. Je-li to možné, upravte výsledek na jednoduchý tvar a určete obor, ve kterém platí.

1. $y = \dfrac{8x}{4 - x^2}$

2. $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

3. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

4. $y = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

5. $y = \dfrac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$

6. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$

7. $y = \dfrac{2}{2x - 1} - \dfrac{1}{x}$

8. $y = \dfrac{\pi}{x} + \log 2$

9. $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}$

10. $y = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

11. $y = \sqrt{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$

12. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}\,\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}$

13. $y = \cos 2x - 2 \sin x$

14. $y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x$

15. $y = \sin^n x \cos nx$

16. $y = \sin(\sin(\sin x))$

17. $y = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$

18. $y = 4 \sqrt[3]{\operatorname{cotg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{cotg}^8 x}$

19. $y = \sin\left(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)\right)$

20. $y = e^{-x^2}$

21. $y = x^7 e^x$

22. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

23. $y = e^x \cos x$

24. $y = \dfrac{1}{x} + 2 \log x - \dfrac{\log x}{x}$

25. $y = \log x \cdot \log_{10} x - \log a \cdot \log_a x \qquad (a > 0)$

26. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$

27. $y = x \operatorname{cotg} x$

28. $y = \dfrac{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x - x}{2}$

29. $y = \sin\left(e^{x^2 + 3x - 2}\right)$

30. $y = A e^{-k^2 x} \sin(\omega x + \alpha)$

31. $y = e^{\sqrt{x + 1}}$

32. $y = e^{\sqrt{\log x}}$

33. $y = 3^{\sin x}$

34. $y = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$

35. $y = x^{x^2}$

36. $y = x^{\sin x}$

37. $y = x^{\frac{1}{x}}$

38. $y = \log_x a \qquad (a > 0)$

39. $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$

40. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x^2 - \operatorname{arctg} x} + \frac{1}{2} \log x + 1$

41. $y = x - \log(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$

42. $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{1 + \log(2x+3)}}$

43. $y = \frac{1}{2}(3 - x)\sqrt{1 - 2x - x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}$

44. $y = \log \cos \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

45. $y = \arccos \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

46. $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} (\sqrt[3]{4x^2} + 1)^2$

47. $y = (x^3 - 2)^2 \sqrt[3]{(x^3 + 6)^2 e^{\cos^3 x}}$

48. $y = x^{\frac{x}{\log^2 x}}$

49. $y = \sqrt[x]{(2x \sin x + 1)^2}$

50. $y = \log \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)(x + 2)^2}{(x - 2)\, e^{\operatorname{arctg} x}}}$

2. Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu dané funkce $f(x)$ postupujeme podle těchto bodů:

1. určíme definiční obor, obor spojitosti a speciální vlastnosti funkce,

2. vypočteme jednostranné limity v bodech nespojitosti a v hraničních bodech definičního oboru,

3. zjistíme intervaly monotónie a nalezneme lokální maxima a minima funkce,

4. určíme intervaly, na kterých je funkce konvexní nebo konkávní, a nalezneme inflexní body,

5. určíme asymptoty funkce (včetně vertikálních a horizontálních),

6. sestrojíme graf funkce.

K jednotlivým bodům, z nichž některé mohou u konkrétní funkce odpadnout, lze uvést tyto pokyny:

ad 1) Speciální vlastnosti funkce jsou: sudost, lichost, periodičnost, kladnost, nezápornost apod. Je-li funkce sudá, je její graf symetrický podle osy y, je-li lichá, je symetrický podle počátku, takže v obou případech stačí vyšetřit funkci jen na kladné části jejího definičního oboru a graf potom symetricky doplnit. Je-li funkce periodická s periodou T, stačí ji vyšetřit na libovolném intervalu délky T.

ad 2) Jednostranné limity (zprava i zleva) počítáme v bodech nespojitosti a v koncových bodech jednotlivých intervalů, na nichž je funkce definována (včetně $-\infty$, $+\infty$).

ad 3) a) Intervaly monotónie: Je-li funkce spojitá v intervalu I (jakéhokoliv druhu) a je-li $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$)

uvnitř I, přičemž rovnost nastává jen v konečně mnoha bodech, je funkce $f(x)$ v intervalu I rostoucí (resp. klesající).

b) Lokální extrémy: Lokální extrém může nastat jen v takových bodech, v nichž derivace buď neexistuje, nebo je rovna nule. Je-li x_0 takový bod, můžeme existenci extrému zjistit b_1) podle 1. derivace, b_2) podle 2. derivace:

b_1) Nechť $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje a funkce je spojitá v bodě x_0. Mění-li derivace $f'(x)$ při průchodu bodem x_0 (zleva doprava) znamení ze záporného na kladné, má funkce v bodě x_0 lokální minimum; mění-li znamení z kladného na záporné, má funkce v bodě x_0 lokální maximum.

b_2) Nechť $f'(x_0) = 0$. Potom, je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce v bodě x_0 lokální minimum, je-li $f''(x_0) < 0$, má v bodě x_0 lokální maximum.

ad 4) Je-li $f(x)$ spojitá v intervalu I a je-li $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) uvnitř I, je funkce $f(x)$ konvexní (resp. konkávní) v I. Je-li $f''(x_0) = 0$ a mění-li druhá derivace při průchodu bodem x_0 znamení (ze záporného na kladné nebo z kladného na záporné), pak x_0 je inflexní bod.

ad 5) Funkce $f(x)$ má vertikální asymptotu $x = a$, jestliže některá z jednostranných limit $\lim_{x \to a_-} f(x)$, $\lim_{x \to a_+} f(x)$ je nevlastní. Funkce má v $+\infty$ horizontální asymptotu $y = b$, jestliže existuje (konečná) limita $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, analogicky pro $-\infty$. Existují-li limity $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$, má funkce v $+\infty$ asymptotu $y = kx + q$, analogicky pro $-\infty$.

V některých úlohách (převážně praktického rázu) se požaduje nalezení absolutního maxima nebo minima spojité funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. V takových případech není třeba provádět vyšetření celého průběhu funkce a stačí se omezit na bod 3). Je však třeba mít na zřeteli, že absolutní maximum (minimum) může ležet v některém z krajních bodů a, b.

<u>Příklad 1.</u> Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x}{e^x}$. o.K.

1) Funkce je definovaná a spojitá v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$, $f(x) > 0$ pro $x > 0$, $f(x) < 0$ pro $x < 0$, $f(0) = 0$.

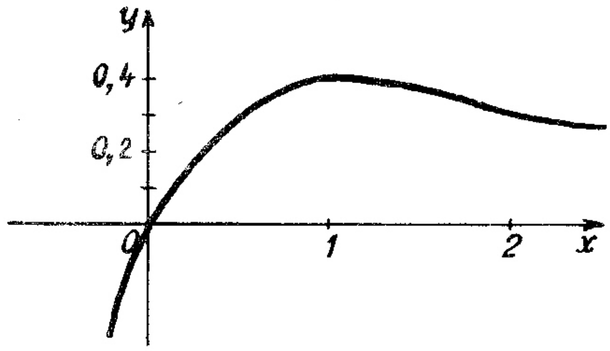
2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$.

3) $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$. Protože jmenovatel je stále kladný, rozhoduje o znamení derivace znamení čitatele. Je tedy $f'(x) > 0$ pro $1 - x > 0$, tj. $x < 1$, $f'(x) < 0$ pro $x > 1$, $f'(x) = 0$ pro $x = 1$. Funkce je tedy rostoucí v intervalu $(-\infty, 1)$, klesající v intervalu $(1, +\infty)$ a v bodě 1 má maximum, $f(1) = \frac{1}{e} \doteq 0{,}4$.

4) $f''(x) = \left(\frac{1-x}{e^x}\right)' = \frac{x-2}{e^x}$. Tedy $f''(x) > 0$ pro $x > 2$, $f''(x) < 0$ pro $x < 2$, $f''(x) = 0$ pro $x = 2$. Funkce je konkávní v intervalu $(-\infty, 2)$, konvexní v intervalu $(2, +\infty)$ a v bodě 2 má inflexní bod, $f(2) \doteq 0{,}3$.

5) Funkce nemá vertikální asymptoty. Je $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x}$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - 0.x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, takže přímka $y = 0$ je horizontální asymptotou v $+\infty$. V $-\infty$ nemá funkce horizontální asymptotu, neboť $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

6) Na základě zjištěných údajů můžeme načrtnout graf:



__Příklad 2.__ Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$.

1) Funkce je definovaná a spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a je lichá.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

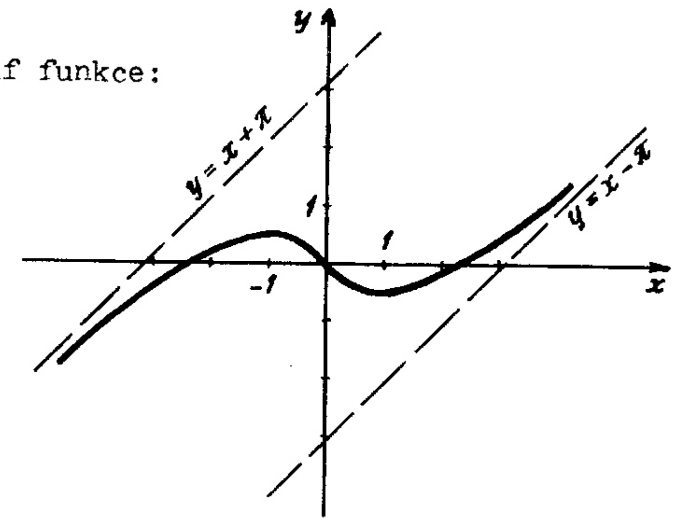
3) $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{1 + x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Protože jmenovatel je stále kladný, je $f'(x) > 0$ pro $x^2 > 1$, tj. pro $x < -1$ nebo $x > 1$, $f'(x) < 0$ pro $x^2 < 1$, tj. pro $-1 < x < 1$, $f'(x) = 0$ pro $x = \pm 1$. Funkce je tedy v intervalu $(-\infty, -1)$ rostoucí, v $(-1, +1)$ klesající a v $(1, +\infty)$ rostoucí, v bodě -1 má lokální maximum a v bodě 1 lokální minimum, $f(1) = 1 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} \doteq$ $\doteq -0{,}5$, $f(-1) = -f(1) \doteq 0{,}5$.

4) $f''(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$. Je $f''(x) > 0$ pro $x > 0$, $f''(x) < 0$ pro $x < 0$, $f''(x) = 0$ pro $x = 0$, takže funkce je konkávní v intervalu $(-\infty, 0)$, konvexní v intervalu $(0, +\infty)$ a v bodě 0 má inflexní bod, $f(0) = 0$.

5) Funkce nemá vertikální asymptoty. Je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - 2\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\right) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2\,\mathrm{arctg}\,x) =$ $= -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2\,\mathrm{arctg}\,x) = -2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Funkce má tedy v $+\infty$ asymptotu $y = x - \pi$, v $-\infty$ asymptotu $y = x + \pi$.

6) Graf funkce:



<u>Příklad 3.</u> Vyšetřete průběh funkce $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 - x}$.

1) Funkce je definovaná a spojitá pro $x \neq 0$ a $x \neq 1$, tedy na množině $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

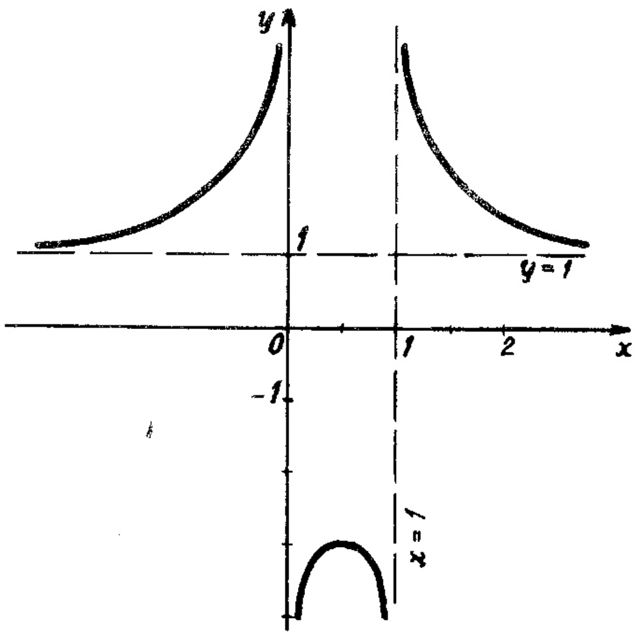
2) Vypočteme limity funkce v nevlastních bodech a jednostranné limity v bodech $0, 1$: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0_-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0_+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1_+} f(x) = +\infty$.

3) $f'(x) = (1 + \frac{1}{x^2 - x})' = \frac{1 - 2x}{(x^2 - x)^2}$. Je $f'(x) > 0$ pro $1 - 2x > 0$, $f'(x) < 0$ pro $1 - 2x < 0$, $f'(x) = 0$ pro $1 - 2x = 0$. Funkce je rostoucí pro $x < \frac{1}{2}$, klesající pro $x > \frac{1}{2}$, v bodě $\frac{1}{2}$ má lokální maximum, $f(\frac{1}{2}) = -3$.

4) $f''(x) = \left(\frac{1 - 2x}{(x^2 - x)^2}\right)' = \frac{6x^2 - 6x + 2}{(x(x - 1))^3}$. Kvadratický mnohočlen v čitateli má záporný diskriminant a je tedy stále kladný, takže o znamení druhé derivace rozhoduje znamení jmenovatele. Je proto $f''(x) > 0$ pro $x(x - 1) > 0$, tj. buď pro $x > 1$, nebo pro $x < 0$, a $f''(x) < 0$ pro $x(x - 1) < 0$, tj pro $0 < x < 1$. Inflexní bod funkce nemá.

5) Funkce má vertikální asymptoty $x = 0$, $x = 1$ a horizontální asymptotu $y = 1$ (v $+\infty$ i $-\infty$).

6) Graf:



Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$.

1) Funkce je definovaná a spojitá na množině $(-\infty, 0) \cup \cup (0, +\infty)$ a pro každé x z této množiny je $f(x) > -1$.

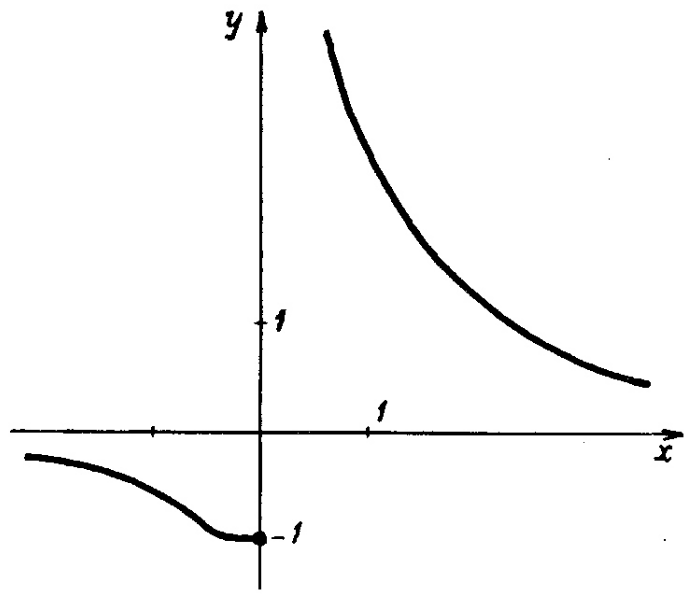
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$, proto je funkce na každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ klesající a nemá žádný lokální extrém.

4) $f''(x) = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$. Funkce je konkávní v intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$, konvexní v každém z intervalů $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, +\infty)$, v bodě $x = -\frac{1}{2}$ má inflexní bod, $f(-\frac{1}{2}) \doteq -0{,}9$.

5) Funkce má vertikální asymptotu $x = 0$, horizontální asymptotu $y = 0$ v $\pm\infty$.

6) Graf:



OK

Příklad 5. Vyšetřete průběh funkce $y = \sin x + \cos x$.

1) Funkce je definovaná a spojitá pro $x \in (-\infty, +\infty)$ a je periodická s periodou 2π. Stačí ji proto vyšetřit na libovolném intervalu délky 2π, např. na $\langle 0, 2\pi)$.

2) Limity funkce v $+\infty$, $-\infty$ neexistují.

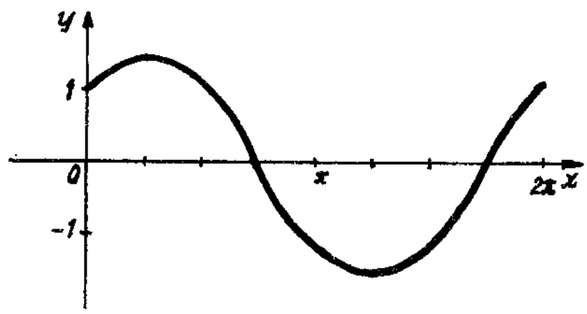
3) $f'(x) = \cos x - \sin x$. $f'(x) > 0$ pro $\cos x > \sin x$, tedy

pro ta x, pro něž buď $\cos x > 0$, $\operatorname{tg} x < 1$, nebo $\cos x < 0$, $\operatorname{tg} x > 1$, nebo $\cos x = 0$, $\sin x < 0$. První případ nastává pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}) \cup$ $\cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi\rangle$, druhý pro $x \in (\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$, třetí pro $x = \frac{3\pi}{2}$. Je tedy $f'(x) > 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, 2\pi\rangle$. Analogicky zjistíme, že $f'(x) < 0$ pro $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ a že $f'(x) = 0$ pro $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$. Funkce je na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ rostoucí pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{4})$, klesající pro $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$, rostoucí pro $x \in (\frac{5\pi}{4}, 2\pi\rangle$, v bodě $\frac{\pi}{4}$ má lokální maximum, v bodě $\frac{5\pi}{4}$ lokální minimum, $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \doteq 1{,}4$, $f(\frac{5\pi}{4}) =$ $= -\sqrt{2} \doteq -1{,}4$.

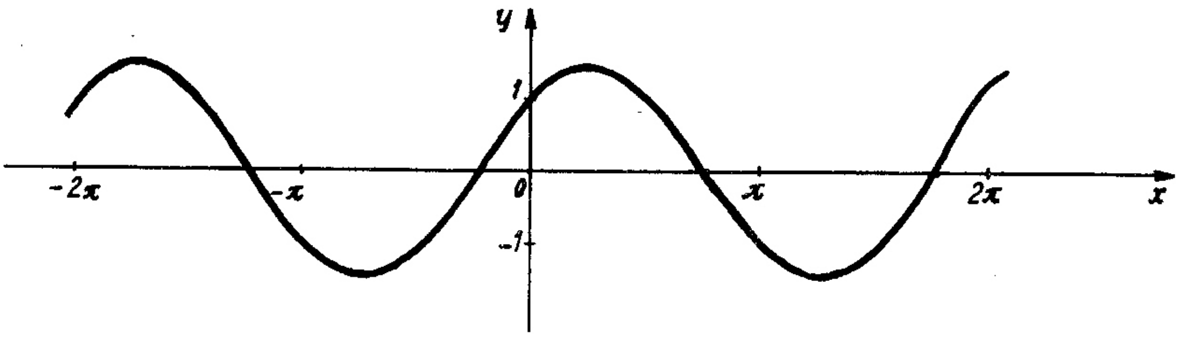
4) $f''(x) = -\sin x - \cos x$. $f''(x) > 0$ pro $x \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, $f''(x) < 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi\rangle$, $f''(x) = 0$ pro $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$. Funkce je konkávní v intervalu $\langle 0, \frac{3\pi}{4})$, konvexní v intervalu $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, konkávní v intervalu $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\rangle$ a má inflexní body $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$, $f(\frac{3\pi}{4}) = f(\frac{7\pi}{4}) = 0$.

5) Funkce nemá žádné asymptoty.

6) a) Graf funkce na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$:



b) Graf funkce:



Příklad 6. Nalezněte absolutní minimum funkce

$$f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$$

na intervalu $\langle -3, 0\rangle$.

Je $f'(x) = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 =$ $= (x+2)(x-1)^2(5x+4)$, takže derivace je na intervalu $\langle -3, 0\rangle$ rovna nule v bodech -2, $-0{,}8$, kladná na intervalech $\langle -3, -2)$, $(-0{,}8, 0\rangle$, záporná na intervalu $(-2, -0{,}8)$. V bodě $x = -0{,}8$ má tedy lokální minimum, $f(-0{,}8) \doteq -8{,}4$. Protože $f(0) = -4$ je $f(0) > f(-0{,}8)$; funkce nabývá absolutního minima buď v bodě $-0{,}8$ nebo v bodě -3. Dosazením se přesvědčíme, že $f(-3) = -64$, je tedy $f(-3) < f(-0{,}8)$, takže absolutního minima funkce nabývá v bodě -3.

C v i č e n í

Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

51. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

52. $y = (x^2-1)^3$

53. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$

54. $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

55. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

56. $y = \dfrac{e^x}{x}$

57. $y = x^2 e^{-x^2}$

58. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

59. $y = x + \dfrac{\log x}{x}$

60. $y = x \sin x$

61. $y = x + \sin x$

62. $y = \log(x^2+1)$

63. $y = (x+1)(x-2)^2$

64. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

65. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

66. $y = (x-3)\sqrt{x}$

67. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$

68. $y = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$

69. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$

70. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arccotg} x$

71. $y = \arcsin \dfrac{-2x}{1+x^2}$

72. $y = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$

73. $y = x^x$

74. $y = \arccos \dfrac{1-x}{1-2x}$

75. $y = e^{\sin x}$

76. $y = e^{\operatorname{tg} x}$

77. $y = \cos x - \log \cos x$

78. $y = \dfrac{x}{e^x}$

79. $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

80. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

3. Integrace per partes a věta o substituci

Ze vzorců pro derivace elementárních funkcí dostáváme tuto tabulku integrálů (C značí integrační konstantu):

$$\int 0\,dx = C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int 1\,dx = x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Pro integraci součtu, součinu a násobku konstantou platí tyto věty:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C$$

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx + C$$

$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, k konstanta.

Příklad 1. $\int (3x^5 - \sin x + \sqrt{x})\,dx = 3\int x^5\,dx - \int \sin x\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$
$= 3\cdot\frac{x^6}{6} + \cos x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}x^6 + \cos x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

Pro integraci součinu platí vzorce pro "integraci per partes" (připomeňte si předpoklady!):

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx\,.$$

Počítáme-li integrál ze součinu dvou funkcí metodou per partes, je třeba nejprve rozhodnout, kterou z těchto funkcí zvolíme za funkci $u'(x)$ a kterou za $v(x)$. Při přechodu od integrálu $\int u'(x)\,v(x)\,dx$ k integrálu $\int u(x)\,v'(x)\,dx$ přecházíme od funkce

$u'(x)$ k $u(x)$ a od funkce $v(x)$ k $v'(x)$, takže funkci $u'(x)$ integrujeme a funkci $v(x)$ derivujeme. Je proto nutné za $u'(x)$ zvolit funkci, kterou umíme zintegrovat. Naopak za funkci $v(x)$ volíme tu z obou funkcí, která se při derivování zjednoduší. Např. je-li jeden z členů integrovaného součinu některá z funkcí $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, bereme ji téměř vždy za funkci $v(x)$, protože její derivací dostáváme buď racionální funkci nebo funkci obsahující výraz $\sqrt{1-x^2}$, jejichž integraci lze provést speciálními metodami (viz dále).

Příklad 2. $\int x \cos x\, dx$. Protože funkce x se derivováním zjednoduší, volíme $v(x) = x$, $u'(x) = \cos x$, potom $v'(x) = 1$, $u(x) = \int \cos x\, dx = \sin x$, takže $\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$.

Příklad 3. $\int \log x\, dx$. Integrovanou funkci můžeme psát ve tvaru součinu $1 \cdot \log x$. Za $u'(x)$ je třeba zvolit funkci, kterou umíme zintegrovat; volíme proto $u'(x) = 1$, $v(x) = \log x$, tedy $u(x) = \int 1\, dx = x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$, proto $\int 1 \cdot \log x\, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \log x - \int 1\, dx = x \log x - x + C$.

Příklad 4. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. Protože funkce $\operatorname{arctg} x$ se derivováním převede na racionální funkci, volíme $v(x) = \operatorname{arctg} x$, $u'(x) = x$. Potom $\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C = \frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C.$

Příklad 5. $\int \frac{\log x}{x}\, dx$. Integrovaná funkce má tvar součinu $\frac{1}{x} \cdot \log x$. Volíme $v(x) = \log x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, pak $v'(x) = \frac{1}{x}$, $u(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \log x$, tedy $\int \frac{\log x}{x}\, dx = (\log x)^2 - \int \frac{\log x}{x}\, dx$. Došli jsme sice k původnímu integrálu, avšak jeho převedením na levou stranu dostáváme ihned výsledek: $2 \int \frac{\log x}{x}\, dx = (\log x)^2$, $\int \frac{\log x}{x}\, dx =$

$= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C.$

Příklad 6. $\int e^x \sin x\, dx$. Položíme $u'(x) = e^x$, $v(x) = \sin x$, tj. $u(x) = e^x$, $v'(x) = \cos x$, takže $\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$. Integrál $\int e^x \cos x\, dx$ vypočítáme opětným použitím integrace per partes, kde položíme $u'(x) = e^x$, $v(x) = \cos x$, takže $u(x) = e^x$, $v'(x) = -\sin x$. Potom $\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx$. Dosazením do původního vztahu dostáváme $\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx) = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x\, dx$, což je analogický případ jako v předchozím příkladu. Výsledek:
$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\, e^x(\sin x - \cos x) + C.$

Příklad 7. $\int x^n e^x\, dx$, kde n je kladné celé číslo. Položíme $u'(x) = e^x$, $v(x) = x^n$, tedy $u(x) = e^x$, $v'(x) = nx^{n-1}$. Potom $\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$. Tím jsme dostali vztah

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx,$$

který umožňuje převést výpočet původního integrálu na výpočet integrálu s nižší mocninou (tzv. rekurentní vzorec). Vícenásobným použitím tohoto vzorce dojdeme nakonec k integrálu $\int x^0 e^x dx = \int e^x\, dx$, který už umíme vypočítat. Např. při výpočtu $\int x^2 e^x dx$ dostáváme z rekurentního vzorce pro $n = 2$

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx$$

Integrál $\int x e^x\, dx$ vypočteme opět z rekurentního vzorce pro $n = 1$:

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x$$

takže

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

Příklad 8. Odvodíme rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\, dx$, kde n je kladné celé číslo, a libovolné

číslo různé od nuly. Položíme $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, tj. $u(x) = x$, $v'(x) = \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$. Potom $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx =$
$= x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} +$
$+ 2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx -\right.$
$\left.- a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx\right) = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1})$. Ze vztahu

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1})$$

dostáváme

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n$$

což je hledaný rekurentní vzorec. K tomu, abychom tento vzorec mohli použít, je však třeba ještě stanovit hodnotu I_1 (viz Příklad 11).

Pro integraci dalších typů funkcí používáme věty o substituci; platí vzorec

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

(připomeňte si předpoklady!). Používá se dvojím způsobem:

a) Máme vypočítat integrál $\int f(x)\,dx$. Provedeme substituci $x = \varphi(t)$. Podle věty o substituci je původní integrál roven integrálu $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$, v němž ve výsledku vyjádříme opět t pomocí x. Povšimněte si, že nový integrál získáme z původního tak, že ve funkci $f(x)$ nahradíme proměnnou x funkcí $\varphi(t)$ a dx nahradíme výrazem $\varphi'(t)\,dt$.

<u>Příklad 9.</u> $\int \cos 4x\,dx$. Zde nemůžeme přímo použít tabulkového integrálu, protože $\cos$ nemá jednoduchý argument. Provedeme proto substituci $4x = t$, tedy $x = \frac{t}{4} = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{1}{4}\,dt$. Podle věty o substituci $\int\cos 4x\,dx = \int\cos t\cdot\frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\int\cos t\,dt =$
$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C$.

<u>Příklad 10.</u> $\int x\,e^{3x}\,dx$. Provedeme substituci $3x = t$, $x = \frac{t}{3}$,

$dx = \frac{1}{3}dt$. Potom $\int x e^{3x}\, dx = \int \frac{t}{3} e^t \cdot \frac{1}{3}\, dt = \frac{1}{9}\int t e^t\, dt$.

Poslední integrál vypočítáme integrací per partes: $\int t e^t dt =$ $= \int t(e^t)' dt = te^t - \int e^t dt = (t-1)e^t$, tedy $\int x^{3x} dx =$ $= \frac{1}{9}(t-1)e^t + C = \frac{1}{9}(3x-1)e^{3x} + C$.

Příklad 11. $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx$, a libovolné nenulové číslo. Kdyby bylo $a = 1$, jednalo by se o tabulkový integrál. Původní integrál převedeme na tento tvar vhodnou substitucí: nejprve ve jmenovateli vytkneme a^2, $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(x/a)^2 + 1}\, dx$. Nyní provedeme substituci $\frac{x}{a} = t$, $x = at$, $dx = a\,dt$: $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx =$
$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{t^2 + 1}\, dt = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Vypočítali jsme tím vlastně hodnotu integrálu I_1 z Příkladu 8.

Příklad 12. $\int \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^3}\, dx$. Na základě příkladů 8 a 11 je možno vypočítat $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\, dx$ pro libovolné kladné celé n a nenulové a. Náš integrál bychom mohli vypočítat tímto způsobem, kdybychom vhodnou substitucí v kvadratickém trojčlenu ve jmenovateli odstranili člen, obsahující x v první mocnině. Protože $(x^2 + 2x + 5) = (x^2 + 2x + 1) + 4 = (x+1)^2 + 4$, vede k tomuto cíli substituce $x + 1 = t$, $dx = dt$. Potom

$\int \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^3}\, dx = \int \frac{1}{(t^2 + 2^2)^3}\, dt$. Jde tedy o integrál I_3 z příkladu 8, kde $a = 2$. Podle rekurentního vzorce je

$$I_3 = \frac{1}{16}\,\frac{t}{(t^2+4)^2} + \frac{3}{16} I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{8}\,\frac{t}{t^2+4} + \frac{1}{8} I_1 = \frac{1}{8}\,\frac{t}{t^2+4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2},$$

tedy

$$I_3 = \frac{1}{16}\,\frac{t}{(t^2+4)^2} + \frac{3}{128}\,\frac{t}{t^2+4} + \frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{t}{2},$$

takže zpětným dosazením $t = x + 1$ dostáváme

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3} = \frac{1}{16}\,\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{3}{128}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{3}{256}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} +$$
$$+ C.$$

Příklad 13. Obecněji, jde-li o výpočet integrálu

$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}\, dx$, kde n je kladné celé číslo a kvadratický polynom ve jmenovateli je nerozložitelný (tj. má záporný diskriminant, $p^2 - 4q < 0$), postupujeme analogicky: doplněním na úplný čtverec dostáváme

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

takže substitucí $x + \frac{p}{2} = t$, $a = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, převedeme původní integrál na integrál $\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^n}\, dt = I_n$ a dále postupujeme jako v předchozím příkladu.

b) Výpočet integrálu tvaru $\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx$ je možno substitucí $\varphi(x) = t$ převést na výpočet integrálu $\int f(t)\, dt$ (kde ve výsledku je opět třeba vyjádřit t pomocí x). K tomu je zapotřebí, aby integrovaná funkce měla tvar $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$, tj. aby byla součinem jisté funkce f, v níž je za argument dosazena funkce $\varphi(x)$, a derivace dosazené funkce $\varphi'(x)$. Ještě jinak bychom mohli říci, že funkce musí mít tvar součinu funkce, v níž se argument x nevyskytuje jinak, než jako součást funkce $\varphi(x)$, a derivace $\varphi'(x)$.

Příklad 14. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$. Protože $\cos x$ je derivací funkce $\sin x$, provedeme substituci $\varphi(x) = \sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$, takže podle věty o substituci je $\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int t^3 dt =$
$= \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$

Příklad 15. $\int \frac{1 + \log x}{x}\, dx$. Integrovaná funkce má tvar součinu $(1 + \log x)\cdot \frac{1}{x}$, kde $\frac{1}{x}$ je derivací funkce $1 + \log x$, takže substitucí $1 + \log x = t$, $\frac{1}{x} dx = dt$ dostáváme $\int \frac{1 + \log x}{x}\, dx = \int t\, dt =$
$= \frac{t^2}{2} + C = \frac{(1 + \log x)^2}{2} + C.$

Příklad 16. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\, dx$. V integrované funkci, kterou můžeme přepsat ve tvaru $arctg\,x \cdot \frac{1}{1+x^2}$, je člen $\frac{1}{1+x^2}$ derivací funkce $arctg\,x$, takže k cíli vede substituce $arctg\,x = t$, $\frac{1}{1+x^2}\,dx = dt$, tedy $\int \frac{arctg x}{1+x^2}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(arctg\,x)^2}{2} + C$.

Příklad 17. $\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$. Kdyby byl v čitateli výraz $3x^2$, pak by tento člen byl derivací jmenovatele a bylo by možno použít věty o substituci. Toho dosáhneme, vynásobíme-li čitatel třemi a celý integrál vydělíme stejným číslem, čímž se jeho hodnota nezmění: $\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+2}\,dx$. Substituce $x^3+2=t$:
$\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\log|t| + C = \frac{1}{3}\log\, x^3+2 \;+C$.

Příklad 18. $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx$. Rozepíšeme-li funkci ve tvaru $\frac{x^4}{(1+x^4)^2}\,x^3$, vidíme, že člen x^3 je - až na konstantu - derivací funkce x^4. Doplněním této konstanty tak jako v předešlém příkladu dostáváme $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{(1+x^4)^2}\,4x^3\,dx$. Substituce $x^4 = t$: $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{t}{(1+t)^2}\,dt = \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{1+t}\,dt - \right.$
$\left. - \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt\right)$.

Oba poslední integrály vypočteme novou substitucí $1+t=z$, $dt = dz$: $\int \frac{1}{1+t}\,dt = \int \frac{1}{z}\,dz = \log|z| + C = \log|1+t| + C$,
$\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \int \frac{1}{z^2}\,dz = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{1+t} + C$. Tedy $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx =$
$= \frac{1}{4}\left(\log|1+t| + \frac{1}{1+t}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\log(1+x^4) + \frac{1}{1+x^4}\right) + C$.

Příklad 19. $\int \frac{7x+4}{(x^2+2x+5)^3}\,dx$. Nejprve upravíme funkci tak, abychom v čitateli dostali derivaci kvadratického trojčlenu ve jmenovateli, tj. výraz $2x+2$. Je $7x+4 = \frac{7}{2}\cdot 2x + 4 =$
$= \frac{7}{2}(2x+2) - 7 + 4 = \frac{7}{2}(2x+2) - 3$, takže $\int \frac{7x+4}{(x^2+2x+5)^3}\,dx =$
$= \int \frac{\frac{7}{2}(2x+2) - 3}{(x^2+2x+5)^3}\,dx = \frac{7}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^3}\,dx - 3\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^3}\,dx$

První integrál vypočítáme substitucí $x^2+2x+5 = t$,
$(2x+2)\,dx = dt$, $\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^3}\,dx = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2(x^2+2x+5)^2}$

Druhý integrál je vypočítán v Příkladu 12. Výsledek:

$$\int \frac{7x+4}{(x^2+2x+5)^3}\,dx = -\frac{7}{4}\,\frac{1}{(x^2+2x+5)^2} - 3\Big(\frac{1}{16}\,\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{3}{128}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{3}{256}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2}\Big) + C.$$

Příklad 20. Integrál tvaru $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, kde kvadratický polynom je nerozložitelný, počítáme analogickým postupem jako v předchozím příkladu. Upravíme čitatel tak, abychom v něm dostali funkci $2x+p$, která je derivací trojčlenu ve jmenovateli: $Ax+B = \frac{A}{2}\cdot 2x + B = \frac{A}{2}(2x+p) - \frac{A}{2}p + B$, potom $\int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n} =$

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B - \frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

Integrál $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ vypočteme substitucí $x^2+px+q = t$, $(2x+p)\,dx = dt$, pak $\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C.$

Integrál $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ se vypočte postupem, popsaným v Příkladu 13.

Při výpočtu složitějších příkladů se často integrace per partes kombinuje s větou o substituci.

Příklad 21. $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx$. Použijeme integraci per partes, kde $u' = 1$, $v = \mathrm{arctg}\,x$: $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$ $= x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$. Poslední integrál vypočteme substitucí $1+x^2 = t$: $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log(1+x^2) + C.$

Výsledek: $\int \mathrm{arctg}\,x\,dx = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.$

Příklad 22. $\int \frac{x\,\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Protože integrovaná funkce má tvar součinu $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\arcsin x$, je vhodné použít integraci per partes, kde $v = \arcsin x$, $u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. K tomu musíme nejprve vypočítat funkci u: $u = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Substituce $1-x^2 = t$, $-2x\,dx = dt$: $u = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{1}{2}\,\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\,dt = -\sqrt{1-x^2}$. Teď už můžeme integrovat per partes: $\int \frac{x\,\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x -$

$$-\int -\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x + x + C.$$

Příklad 23. $\int \log(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx$. Použijeme integrace per partes, kde $u' = 1$, $v = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$, tedy $u = x$,

$v' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, $\int \log(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx =$

$= x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx.$

V posledním integrálu substitucí $1 + x^2 = t$, $2x\,dx = dt$ dostáváme $\int \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = 2\sqrt{1 + x^2}$. Výsledek: $\int \log(x + \sqrt{1 + x^2})\,dx =$

$= x \log(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C.$

C v i č e n í

Vypočtěte následující integrály za pomoci základních vzorců pro integrování elementárních funkcí. Určete zároveň obor, ve kterém výsledek platí.

81. $\int \sqrt{x}\, dx$ **82.** $\int \frac{dx}{x^2}$

83. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$ **84.** $\int (1-2u)\, du$

85. $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$ **86.** $\int 10^x\, dx$

87. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx$ **88.** $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\, dx$

89. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\, dx$ **90.** $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

91. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$ **92.** $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx$

93. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\, dx$ **94.** $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}\, dx$

95. $\int tg^2 x\, dx$ **96.** $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\, dx$

97. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$ **98.** $\int (\arcsin x - \arccos x)\, dx$

99. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$ **100.** $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\, dx$

Při výpočtu následujících integrálů použijte větu o substituci:

101. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$ **102.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$

103. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$ **104.** $\int (2x-3)^{10}\, dx$

105. $\int \sqrt[3]{1-3x}\, dx$ **106.** $\int x e^{-x^2}\, dx$

107. $\int \sin^5 x \cos x\, dx$ **108.** $\int tg\, x\, dx$

109. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

110. $\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$

111. $\int \sin x \cos x\,dx$

112. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

113. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$

114. $\int \cos 3x\,dx$

115. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$

116. $\int \sin(2x-3)\,dx$

117. $\int \frac{dx}{2x-1}$

118. $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

119. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$

120. $\int e^x \sin e^x\,dx$

121. $\int (\cos\alpha - \cos 2x)\,dx$

122. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

123. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,dx$

124. $\int \frac{1}{1-x^2}\log\frac{1+x}{1-x}\,dx$

125. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

126. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}$

127. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$

128. $\int \sqrt{\frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx$

129. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,dx$

130. $\int e^{-x^3}x^2\,dx$

131. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$

132. $\int \frac{\cos\alpha}{a^2+\sin^2\alpha}\,d\alpha \qquad (a>0)$

133. $\int \frac{dx}{\sin x}$

134. $\int \cos^2 x\,dx$

135. $\int \frac{dx}{\sinh x}$

Integrováním per partes vypočtěte integrály:

136. $\int x\sin 2x\,dx$

137. $\int x e^{-x}\,dx$

138. $\int x^2\arccos x\,dx$

139. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$

140. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

141. $\int x^n\log x\,dx \qquad (n\neq -1)$

142. $\int x\,3^x\,dx$

143. $\int \sin x\cdot\log(\operatorname{tg} x)\,dx$

144. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$

145. $\int x \cos x\,dx$

146. $\int x^2 \sin 2x\,dx$

147. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

148. $\int \log^2 x\,dx$

149. $\int \log x\,dx$

150. $\int \sin \log x\,dx$

***151.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

152. $\int x \operatorname{arctg}^2 x\,dx$

153. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

154. $\int e^x \sin x\,dx$

155. $\int e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

156. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

157. $\int \log(x^2+1)\,dx$

158. $\int \frac{\log x}{x^3}\,dx$

159. $\int e^{ax} \cos nx\,dx$

160. $\int x^2 e^x \sin x\,dx$

Při výpočtu následujících integrálů použijte větu o substituci:

***161.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \quad (a>0)$

***162.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} \quad (a>0)$

163. $\int \frac{x^5}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx$

164. $\int \frac{x^5}{(x^2-4)^2}\,dx$

165. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

166. $\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x \log x}\,dx$

***167.** $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\,dx$

***168.** $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad (a>0)$

169. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,dx$

170. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$

171. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx$

172. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$

173. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

174. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

175. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

176. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

177. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx$

178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$

179. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$

180. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,dx$

***181.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(b>a)$

182. $\int \cos^5 x\,\sqrt{\sin x}\,dx$

183. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}+m}$ $(m>0, a>0)$

184. $\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)\,x}\,dx$

185. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Různé příklady (per partes, substituce nebo obojí):

186. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$

187. $\int \sin\sqrt[3]{x}\,dx$

188. $\int \frac{x^2\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx$

189. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2(1+x^2)}\,dx$

190. $\int (1+e^{3x})^2\,e^{3x}\,dx$

191. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$

192. $\int \frac{x^3}{x+1}\,dx$

193. $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\,dx$

194. $\int \sqrt{\mathrm{tg}^3 x}\,\frac{1}{\cos^4 x}\,dx$

195. $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi}$

196. $\int \frac{(\mathrm{arctg}\,x)^n}{1+x^2}\,dx$

197. $\int (1-\mathrm{tg}\,3x)^2\,dx$

198. $\int x\cos x^2\,dx$

199. $\int (2-3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{5}}\,x^{\frac{1}{3}}\,dx$

200. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

201. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

202. $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}}\,dx$

203. $\int \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$

204. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$

205. $\int (\sqrt{\sin x}+\cos x)^2\,dx$

206. $\int a^{mx}\,b^{nx}\,dx$ $(a>0, b>0)$

207. $\int x\sqrt{a+x}\,dx$

208. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

209. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-\log^2 x}}$

210. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2-4}}\,dx$

211. $\int \frac{dx}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}$

212. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{(1+\sin^2 x)}\,dx$

213. $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}\,dx$

214. $\int e^{-x^2} x^5\,dx$

215. $\int e^{e^x+x}\,dx$

216. $\int \frac{\sin 2x}{4-\cos^2 2x}\,dx$

217. $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx$

218. $\int e^x \sin^2 x\,dx$

219. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

220. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

221. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$

222. $\int e^{2x^2+\log x}\,dx$

223. $\int e^{2x} x^3\,dx$

224. $\int x\sin x\cos x\,dx$

225. $\int x^2\cos\omega x\,dx$

226. $\int e^{x^2} x^3\,dx$

227. $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$

228. $\int \arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$

229. $\int \frac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$

*230. $\int \frac{\log(x+1)-\log x}{x(x+1)}\,dx$

4. Integrace racionálních funkcí

Integraci racionální funkce (podílu dvou mnohočlenů) provádíme v několika krocích. Je-li stupeň mnohočlenu v čitateli větší nebo roven stupni mnohočlenu ve jmenovateli, pak oba mnohočleny nejprve vydělíme. Výsledek je roven součtu jistého mnohočlenu, který snadno zintegrujeme, a racionální funkce, v níž stupeň mnohočlenu v čitateli je *menší* než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli. V dalším se proto stačí omezit na výpočet racionálních funkcí tohoto typu.

Příklad 1. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. Dělením mnohočlenů dostáváme $\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$, takže $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = \int (x^2+x+4)\,dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+ 4\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx$. Poslední integrál spočítáme níže (viz Příklad 13).

Integraci racionální funkce, ve které je stupeň mnohočlenu v čitateli menší než stupeň mnohočlenu ve jmenovateli, provádíme ve dvou krocích. Je to

A) rozklad racionální funkce na částečné zlomky,

B) integrace částečných zlomků.

ad A) K tomu, abychom mohli provést tento krok, musíme mít mnohočlen ve jmenovateli rozložen na součin mocnin lineárních výrazů tvaru $x-a$ a mocnin nerozložitelných kvadratických výrazů tvaru x^2+px+q; jmenovatel musí mít tedy tvar

$$a_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\cdots(x-a_n)^{k_n}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}$$

(kde ovšem některé mocniny mohou být nulové). Teoreticky lze každý mnohočlen zapsat v tomto tvaru, ale jeho nalezení je velmi obtížné. Proto se v příkladech mnohočlen ve jmenovateli buď přímo zadává ve tvaru součinu, nebo ve tvaru, z něhož jej lze na součin převést.

Příklad 2. Převeďte na požadovaný tvar racionální funkce
a) $\dfrac{x^2+4x-2}{x^3-4x}$, b) $\dfrac{x^2+1}{x^3-5x^2+6x}$, c) $\dfrac{3x-1}{x^2+9}$, d) $\dfrac{x+2}{(x^3+x^2+2x)^2}$.

a) Je $x^3-4x=x(x^2-4)$. Výraz $x(x^2-4)$ není ještě požadovaným tvarem, protože kvadratický mnohočlen x^2-4 je rozložitelný. Proto požadovaný tvar jmenovatele je $x(x-2)(x+2)$ a celého zlomku $\dfrac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}$. b) $x^3-5x^2+6x = x(x^2-5x+6) = x(x-2)(x-3)$. Výsledek: $\dfrac{x^2+1}{x(x-2)(x-3)}$. c) Tato racionální funkce je už v požadovaném tvaru, protože kvadratický trojčlen x^2+9 je nerozložitelný. d) $x^3+x^2+2x=x(x^2+x+2)$, přičemž trojčlen x^2+x+2 je nerozložitelný (má záporný diskriminant). Výsledek: $\dfrac{x+2}{x^2(x^2+x+2)^2}$.

Máme-li jmenovatel rozložen na požadovaný tvar, můžeme racionální funkci zapsat ve tvaru součtu tzv. částečných zlomků. Každému členu tvaru $(x-a)^k$ ve jmenovateli odpovídá v tomto součtu k zlomků $\dfrac{A_1}{x-a}, \dfrac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \dfrac{A_k}{(x-a)^k}$, a každému členu tvaru $(x^2+px+q)^l$ odpovídá l zlomků tvaru $\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}$, $\dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}, \dots, \dfrac{B_lx+C_l}{(x^2+px+q)^l}$, kde $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_l$ jsou jisté dosud neurčené konstanty, jimž se říká neurčité koeficienty.

Příklad 3. Rozložte na částečné zlomky racionální funkce:
a) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$, b) $\dfrac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)^3}$, c) $\dfrac{x-1}{x^2(x^2+x+1)}$, d) $\dfrac{4x}{(x^2+2x+4)^2}$. a) Protože oba lineární činitelé jsou v první mocnině, odpovídá každému z nich jen jeden částečný zlomek: členu $x-1$ odpovídá zlomek $\dfrac{A_1}{x-1}$ a členu $x+1$ zlomek $\dfrac{A_2}{x+1}$. Výsledek: $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{x+1}$. b) Členu $(x-1)^2$

odpovídají částečné zlomky $\frac{A_1}{x-1}$, $\frac{A_2}{(x-1)^2}$, členu $(x+2)^3$ částečné zlomky $\frac{A_3}{x+2}$, $\frac{A_4}{(x+2)^2}$, $\frac{A_5}{(x+2)^3}$. Výsledek:

$$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{A_4}{(x+2)^2} + \frac{A_5}{(x+2)^3}.$$

c) $\frac{x-1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}$.

d) $\frac{4x}{(x^2+2x+4)^2} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+2x+4} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2x+4)^2}$.

Pro výpočet hodnot neurčitých koeficientů převedeme nejprve součet částečných zlomků na společného jmenovatele. Tento společný jmenovatel je vždy roven jmenovateli původní racionální funkce. Tím dostáváme rovnost dvou mnohočlenů, která má platit pro všechna x, což je podle známé věty možné jen tehdy, jsou-li koeficienty obou mnohočlenů u stejných mocnin x stejné. Porovnáním těchto koeficientů dostáváme soustavu lineárních rovnic, ze které vypočteme hodnoty neurčitých koeficientů.

Příklad 4. Nalezněte rozklad racionální funkce $\frac{1}{x^2-1}$ na částečné zlomky. Rozklad má tvar $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$. Převedením na společného jmenovatele máme $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A_1(x+1)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A_1+A_2)x+(A_1-A_2)}{x^2-1}$. Protože jmenovatelé jsou stejní, musí platit $1 = (A_1+A_2)x + (A_1-A_2)$. Levou stranu můžeme psát jako mnohočlen $0 \cdot x + 1$; potom z rovnosti $0 \cdot x + 1 = (A_1+A_2)x + (A_1-A_2)$ porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostáváme soustavu

$$0 = A_1 + A_2$$
$$1 = A_1 - A_2$$

Jejím řešením jsou čísla $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$. Rozklad funkce na částečné zlomky tedy je

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Příklad 5. Nalezněte rozklad racionální funkce $\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}$ na částečné zlomky. Rozklad má tvar $\dfrac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)} =$

$$= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+2} = \frac{A_1(x-2)(x+2) + A_2x(x+2) + A_3x(x-2)}{x(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2 + 2(A_2-A_3)x - 4A_1}{x(x-2)(x+2)} .$$

Protože jmenovatel u prvního a posledního z těchto zlomků je stejný, musí platit

$$x^2+4x-2 = (A_1+A_2+A_3)x^2 + 2(A_2-A_3)x - 4A_1$$

a porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 + A_2 + A_3 \\ 4 &= 2(A_2 - A_3) \\ -2 &= -4A_1 \end{aligned}$$

a odtud plyne $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{5}{4}$, $A_3 = -\frac{3}{4}$. Výsledek: $\dfrac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)} =$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{3}{4}}{x+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2} .$$

Příklad 6. Rozložte racionální funkci $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$ na částečné zlomky. Protože x^2+1 je nerozložitelný kvadratický polynom, má rozklad tvar $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(B_1x+C_1)(x^2+1)+B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{B_1x^3 + C_1x^2 + (B_1+B_2)x + C_1 + C_2}{(x^2+1)^2}$$

Porovnáním koeficientů v rovnosti $x^2 = B_1x^3 + C_1x^2 + (B_1+B_2)x + C_1 + C_2$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= B_1 \\ 1 &= C_1 \\ 0 &= B_1 + B_2 \\ 0 &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

a z ní ihned plyne $B_1 = 0$, $C_1 = 1$, $B_2 = 0$, $C_2 = -1$, takže

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} .$$

Uvedený způsob výpočtu neurčitých koeficientů vede vždy k cíli, někdy však může být spojen s řešením dosti rozsáhlé soustavy lineárních rovnic. Výpočet hodnot koeficientů můžeme často urychlit tímto způsobem: Jelikož rovnost mnohočlenů v čitatelích obou zlomků má platit pro všechna x, musí platit pro jakoukoli konkrétní hodnotu x. Zvolíme-li vhodně hodnotu x tak, aby po jejím dosazení všechny členy, obsahující neurčité koeficienty, kromě jediného, byly rovny nule, vypočteme ihned hodnotu jednoho neurčitého koeficientu. Tímto způsobem můžeme vypočítat několik koeficientů (někdy dokonce všechny) přímo a zbylé pak nalezneme obvyklým porovnáním. Blíže bude celý postup zřejmý z dalších příkladů.

Příklad 7. Rozložte funkci $\dfrac{2x^2 - 8x + 14}{(x^2 - 1)(x + 3)}$ na částečné zlomky.

Rozklad $\dfrac{2x^2 - 8x + 14}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{x+1} + \dfrac{A_3}{x+3}$ vede na rovnost čitatelů $2x^2 - 8x + 14 = A_1(x+1)(x+3) + A_2(x-1)(x+3) + A_3(x-1)(x+1)$. Dva z členů napravo obsahují výraz $x - 1$, takže dosazením hodnoty $x = 1$ se vynulují. Dosazením této hodnoty do celé rovnosti dostáváme $2\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + 14 = A_1\cdot 2\cdot 4$, takže $A_1 = 1$. Dále první a třetí člen napravo obsahuje výraz $x + 1$, proto dosazením $x = -1$ máme $2(-1)^2 - 8(-1) + 14 = A_2\cdot(-2)\cdot 2$, tj. $A_2 = -6$. Nakonec, protože první dva členy obsahují výraz $x + 3$, dosadíme $x = -3$ a dostáváme tím $A_3 = 7$.

Výsledek: $\dfrac{2x^2 - 8x + 14}{(x^2 - 1)(x + 3)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{6}{x+1} + \dfrac{7}{x+3}$

Příklad 8. Rozložte funkci $\dfrac{x}{x^2(x+1)(x-\frac{3}{2})}$ na částečné zlomky.

Z rovnosti $\dfrac{x}{x^2(x+1)(x-\frac{3}{2})} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{A_3}{x+1} + \dfrac{A_4}{x-\frac{3}{2}}$

plyne $x = A_1 x(x+1)(x-\frac{3}{2}) + A_2(x+1)(x-\frac{3}{2}) + A_3 x^2(x-\frac{3}{2}) + A_4 x^2(x+1)$.

Postupným dosazením $x = 0$, $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$ dostáváme $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{2}{5}$, $A_4 = \frac{4}{15}$. Tím přechází původní rovnost na rovnost

$$x = A_1(x+1)(x-\tfrac{3}{2})x + \tfrac{2}{5}x^2(x-\tfrac{3}{2}) + \tfrac{4}{15}(x+1)x^2.$$

Porovnáním koeficientů u mocniny x^3 dostáváme $0 = A_1 + \frac{2}{5} + 4\cdot\frac{1}{15}$, tedy $A_1 = -\frac{2}{3}$. Výsledek:

$$\frac{x}{x^2(x+1)(x-\frac{3}{2})} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{4}{15}\,\frac{1}{x-\frac{3}{2}}\,.$$

<u>Příklad 9.</u> Rozložte funkci $\frac{1}{x^3+1}$ na částečné zlomky. Protože $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, je $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(x+1)(Bx+C)}{(x+1)(x^2-x+1)}$. V rovnosti $1 = A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)$ dosadíme $x = -1$ a vypočteme $A = \frac{1}{3}$. Žádnou z hodnot B a C už tímto způsobem nemůžeme vypočítat, protože mnohočlen x^2-x+1 není pro žádné reálné x roven nule (má záporný diskriminant). Vypočteme je proto porovnáním koeficientů: z rovnosti $1 = \frac{1}{3}(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)$ plyne $0 = \frac{1}{3} + B$, $0 = B + C - \frac{1}{3}$, $1 = \frac{1}{3} + C$, tedy $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$.

Výsledek:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2-x}{x^2-x+1}\,.$$

V některých zvláštních případech je možno rozklad najít speciálním obratem. Výsledek musí být přitom stejný, jako kdybychom použili předešlého postupu, protože rozklad na částečné zlomky je určen jednoznačně.

<u>Příklad 10.</u> Rozložte funkci $\frac{1}{x(x+1)}$ na částečné zlomky. Protože $1 = (x+1) - x$, je $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, což je hledaný rozklad.

<u>Příklad 11.</u> Rozložte funkci $\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ na částečné zlomky. Je $x^2 = (x^2+1) - 1$, takže $\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$ (srov. Příklad 6.).

<u>Příklad 12.</u> Rozložte funkci $\frac{x}{x^2-4}$ na částečné zlomky. Je $(x-2)+(x+2) = 2x$, takže $\frac{x}{x^2-4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)+(x+2)}{x^2-4} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-2}.$$

ad B) Máme-li racionální funkci rozloženou na součet částečných zlomků, pak integrál této racionální funkce je roven součtu integrálů jednotlivých částečných zlomků. Částečné zlomky mají buď tvar $\frac{A}{(x-a)^k}$, nebo tvar $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, kde x^2+px+q je nerozložitelný polynom. Substitucí $x - a = t$ snadno zjistíme, že $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \log|x-a| + C$ a $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$ pro $k > 1$. Integrály typu $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ se počítají způsobem, který jsme uvedli v příkladech 19, 20 předešlého oddílu. Tímto postupem můžeme zintegrovat každou racionální funkci.

<u>Příklad 13.</u> $\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx$. Podle Příkladu 5 je $\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}$, takže $\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,dx + \frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx - \frac{3}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x| + \frac{5}{4}\log|x-2| - \frac{3}{4}\log|x+2| + C.$$

<u>Příklad 14.</u> $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$. Podle Příkladu 9 je $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx =$

$$= \int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\,\frac{2-x}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx.$$

Je $x - 2 = \frac{1}{2}\cdot 2x - 2 = \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}$, takže

$$\int\frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Upravíme kvadratický trojčlen ve jmenovateli: $x^2 - x + 1 = x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Substitucí $x - \frac{1}{2} = t$ máme $\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx = \int\frac{1}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$. Výsledek: $\int\frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\log(x^2-x+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C =$

$= \frac{1}{3} \log|x+1| - \frac{1}{6} \log(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

Příklad 15. Podle Příkladu 11 je $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx =$
$= \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right) dx = \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$.

Poslední integrál vypočteme podle rekurentního vzorce (viz Příklad 8 v předchozím oddílu). Podle něho je $I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} I_1 =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$, takže $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \operatorname{arctg} x -$
$- \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right) + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + C.$

Příklad 16. $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$. Rozklad jmenovatele na součin: $x^4 - x^2 =$
$= x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)$. Rozklad na částečné zlomky:

$$\frac{1}{x^4 - x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{x+1}.$$

Do rovnosti $1 = A_1 x(x-1)(x+1) + A_2(x-1)(x+1) + A_3 x^2(x+1) + A_4 x^2(x-1)$ dosadíme postupně $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ a dostáváme $A_2 = -1$, $A_3 = \frac{1}{2}$, $A_4 = -\frac{1}{2}$ a srovnáním koeficientů u třetích mocnin x $0 = A_1 + A_3 + A_4$, tedy $A_1 = 0$. Proto $\frac{1}{x^4 - x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$,
$\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C =$
$= \frac{1}{x} + \log \sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + C.$

Příklad 17. $\int \frac{x^3+1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\, dx$. Protože mnohočleny v čitateli i ve jmenovateli mají stejný stupeň, je třeba je nejprve vydělit:
$\frac{x^3+1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$. Dále je $\frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} =$
$= \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3} =$
$= \frac{A_1(x-2)(x-3) + A_2 x(x-3) + A_3 x(x-2)}{x(x-2)(x-3)}$, tedy $5x^2 - 6x + 1 =$
$= A_1(x-2)(x-3) + A_2 x(x-3) + A_3 x(x-2)$. Postupným dosazením $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ máme $A_1 = \frac{1}{6}$, $A_2 = -\frac{9}{2}$, $A_3 = \frac{28}{3}$. Celkový rozklad je $\frac{x^3+1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{28}{3} \cdot \frac{1}{x-3}$.

Výsledek:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x+6x}\,dx = x + \frac{1}{6}\log|x| - \frac{9}{2}\log|x-2| + \frac{28}{3}\log|x-3| + C.$$

Příklad 18. $\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}\,dx$. Rozklad: $\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} +$

$+ \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_4}{(x-1)^4} = \frac{A_1(x-1)^3 + A_2(x-1)^2 + A_3(x-1) + A_4}{(x-1)^4}$

tedy $x^3 + 1 = A_1(x-1)^3 + A_2(x-1)^2 + A_3(x-1) + A_4$. Dosazením $x = 1$ dostáváme $A_4 = 2$; roznásobením $x^3 + 1 = A_1 x^3 +$ $+ (-3A_1 + A_2)x^2 + (3A_1 - 2A_2 + A_3)x + (-A_1 + A_2 - A_3 + 2)$; srovnáním koeficientů

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 \\ 0 &= -3A_1 + A_2 \\ 0 &= 3A_1 - 2A_2 + A_3 \end{aligned}$$

odsud $A_1 = 1$, $A_2 = 3$, $A_3 = 3$. Tedy $\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}\,dx =$

$$= \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^4} \right) dx =$$

$$= \log|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^3} + C.$$

Cvičení

Integrujte následující racionální funkce:

a) Jmenovatel má pouze *jednoduché reálné* kořeny.

231. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$ **232.** $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)}\,dx$

233. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$ **234.** $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$

235. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx$ **236.** $\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,dx$

237. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$

238. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$ **239.** $\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx$

240. $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

b) Jmenovatel má ***reálné*** kořeny, některé z nich ***násobné***.

241. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ **242.** $\int \frac{x^2}{x^3+5x^2+8x+4}\,dx$

243. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$ **244.** $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}\,dx$

245. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$ **246.** $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx$

247. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$ **248.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$

249. $\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}\,dx$ **250.** $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx$

c) Jmenovatel má *jednoduché imaginární* kořeny.

251. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ **252.** $\int \frac{dx}{1+x^3}$

253. $\int \frac{x}{x^3-1}\,dx$ **254.** $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

***255.** $\int \frac{dx}{1+x^4}$ **256.** $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

d) Jmenovatel má *násobné imaginární* kořeny.

257. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2}\, dx$

258. $\int \frac{(x + 1)^4}{(x^2 + 2x + 2)^3}\, dx$

259. $\int \frac{x^9}{(x^4 - 1)^2}\, dx$

260. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}$

5. Integrace speciálních typů funkcí

Integrály některých funkcí lze převést vhodnými substitucemi na integrály racionálních funkcí.

Pro usnadnění formulací zavedeme tento pojem: racionální funkce více proměnných $R(y_1, \ldots, y_n)$ je výraz, který je utvořen z těchto proměnných a konstant pouze pomocí operací sečítání, odčítání, násobení a dělení (např. $\dfrac{y_1}{2y_2 - y_3}$, $\dfrac{3y_1}{y_2^2}$, $\dfrac{y_3 \cdot y_2}{y_1(y_2^2 + y_3)}$, $\dfrac{4y_2 y_1^3 - y_3^2 y_1^2 + y_1 - 11}{y_4^2 - y_5^3 + y_2}$).

A) Integrály tvaru $\int R(x, \sqrt[n_1]{x}, \ldots, \sqrt[n_s]{x})\,dx$, kde $R(y_1, y_2, \ldots, y_{s+1})$ je racionální funkce, počítáme substitucí $x = t^m$, kde m volíme tak, aby každá z odmocnin $\sqrt[n_j]{x} = t^{\frac{m}{n_j}}$ byla vyjádřena celou mocninou t, tj. aby m bylo dělitelné každým z čísel $n_1, \ldots, n_s$. Touto substitucí převedeme původní integrál na integrál z racionální funkce (jedné proměnné), který vypočteme postupem, uvedeným v předchozím oddílu.

Příklad 1. $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}\,dx$. Substituce $x = t^m$. Potom $\sqrt{x} = t^{\frac{m}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = t^{\frac{m}{3}}$. Čísla $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{3}$ musí být celá, proto m musí být dělitelné dvěma a třemi; nejmenší takové číslo je $m = 6$. Substitucí $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$ je $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}\,dx = \int \dfrac{t^2}{t^6(t^3 + t^2)}\,6t^5\,dt =$

$$= 6\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = 6\int \frac{(t+1) - t}{t(t+1)}\,dt = 6\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6(\log|t| - \log|t+1|) + C = \log\left|\frac{t}{t+1}\right|^6 + C = \log\frac{x}{(\sqrt[6]{x} + 1)^6} + C.$$

B) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, kde $R(y_1, y_2)$ je racionální funkce. V tomto integrálu provedeme substituci $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$, pak $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$ a z této rovnice vypočteme x jako racionální funkci proměnné t. Substitucí do původního integrálu jej převedeme na integrál racionální funkce proměnné t.

Příklad 2. $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx$. Provedeme substituci $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t$, potom $\frac{x-1}{x+1} = t^2$, $x-1 = t^2(x+1)$, $(1-t^2)x = t^2+1$,
$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$. Máme tedy substituci $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, vypočteme ještě
$$dx = \frac{2t(1-t^2)-(1+t^2)(-2t)}{(1-t^2)^2}\,dt = \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt\,.$$
Substitucí $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt$ do původního integrálu dostáváme $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot dx = \int t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2\frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt =$
$= 4\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$. Poslední integrál je vypočítán v Příkladu 15 předchozího oddílu: $\int\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + C$,

takže $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2\,\dfrac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{\frac{x-1}{x+1}+1} + C =$
$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{x+1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$.

Příklad 3. $\int\frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$. Substituce $\sqrt{x+1} = t$, $x+1 = t^2$,
$dx = 2t\,dt$. $\int\frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\,dx = \int\frac{t}{1+t}\cdot 2t\,dt = 2\int\frac{t^2}{1+t}\,dt =$
$= 2\int\frac{t^2+1-1}{1+t}\,dt = 2\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \log|1+t|\right)+C$
$= x+1-2\sqrt{x+1} + 2\log(1+\sqrt{x+1}) + C$.

C) Integrály typu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, kde $R(y_1, y_2)$ je racionální funkce, počítáme tzv. Eulerovými substitucemi.

a) Je-li $a > 0$, použijeme 1. Eulerovy substituce: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + t$. Umocněním tohoto vztahu se druhá mocnina proměnné x vyruší a zůstane $bx + c = 2\sqrt{a}\,xt + t^2$, odkud $x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$, tedy $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t} + t$, což je racionální funkce proměnné t. Dosazením do původního integrálu jej převedeme na integrál racionální funkce.

Příklad 4. $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$. Substituce $\sqrt{x^2+1} = x+t$ (neboť $a = 1$), umocněním $x^2+1 = x^2+2xt+t^2$, $1 = 2xt+t^2$,

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad dx = \frac{(-2t)2t-(1-t^2)2}{4t^2}\, dt = -\frac{t^2+1}{2t^2}\, dt,$$

$\sqrt{x^2+1} = x + t = \frac{1-t^2}{2t} + t = \frac{1+t^2}{2t}$. Proto $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx =$

$$= \int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \left(-\frac{t^2+1}{2t^2}\right) dt = -\int \frac{1}{t}\, dt = -\log|t| + C =$$

$$= -\log(\sqrt{x^2+1} - x) + C.$$

b) Je-li $a < 0$, pak funkce $\sqrt{ax^2+bx+c}$ má smysl jen tehdy, má-li rovnice $ax^2+bx+c=0$ dva reálné různé kořeny x_1, x_2, $x_1 < x_2$ a je-li $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$. Potom ze známého vztahu $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ plyne $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(-a)\frac{x-x_1}{x_2-x}(x_2-x)^2} = (x_2-x)\sqrt{(-a)\frac{x-x_1}{x_2-x}}$. Touto úpravou převedeme původní integrál $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ na integrál typu uvedeného pod B), který počítáme substitucí $\sqrt{(-a)\frac{x-x_1}{x_2-x}} = t$, což je tzv. 2. Eulerova substituce.

Příklad 5. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$. Protože $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)\frac{1-x}{1-x}} = (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, položíme $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = t$, $\frac{1+x}{1-x} = t^2$, odtud

$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\, dt = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt$, dále je $1-x = \frac{2}{t^2+1}$, takže $\int\sqrt{1-x^2}\, dx = \int (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx =$

$$= \int \frac{2}{t^2+1}\, t \cdot \frac{4t}{(t^2+1)^2}\, dt = 8\int \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\, dt = 8\left(\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^3}\, dt\right).$$

Integrály $J_2 = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\, dt$, $J_3 = \int \frac{1}{(t^2+1)^3}\, dt$ vypočteme podle rekurentního vzorce. Je

$$J_2 = \frac{1}{2}\frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2}J_1 = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t,$$

$$J_3 = \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}J_2 = \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} t,$$

tedy $\int\sqrt{1-x^2}\, dx = 8(J_2 - J_3) = 8\left(-\frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{8}\frac{t}{t^2+1} +\right.$

$$+\frac{1}{8}\operatorname{arctg} t) + C = -2\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t + C =$$
$$= -2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1-x}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C =$$
$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

D) Integrál $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, kde $R(y_1, y_2)$ je opět racionální funkce dvou proměnných, lze převést na integrál racionální funkce univerzální trigonometrickou substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Snadno zjistíme, že potom

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Příklad 6. $\int\frac{1}{\sin x}\,dx$. Použitím univerzální trigonometrické substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ dostáváme $\int\frac{1}{\sin x}\,dx = \int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$
$= \int\frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

Příklad 7. $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx = \int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$

$$= \int\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{1+t^2+2t}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int t\,dt + \int 1\,dt = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Univerzální trigonometrická substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ vede vždy k cíli, může však vést ke značně obtížným výpočtům. V některých zvláštních případech je možno použít výhodnějších substitucí.

a) Nechť $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, t.j. funkce je lichá vzhledem ke $\cos x$. Píšeme-li $R(\sin x, \cos x) = \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x$, pak funkce $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ je sudá vzhledem ke $\cos x$, takže funkce $\cos x$ se v ní vyskytuje vesměs v sudé mocnině. Dosazením $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ převedeme tuto funkci na racionální funkci argumentu $\sin x$, $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} = R_1(\sin x)$. Integrál $\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R_1(\sin x)\cos x\,dx$ převedeme substitucí $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$ ihned na integrál racionální funkce.

Příklad 8. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$. Integrovaná funkce je lichá vzhledem ke $\cos x$, tedy $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x\,dx$, substitucí $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$: $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt =$

$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$

b) Je-li funkce R lichá vzhledem k $\sin x$, tj. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, píšeme analogicky $R(\sin x, \cos x) = \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}\sin x$, přičemž funkce $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$ obsahuje $\sin x$ vesměs v sudé mocnině, tedy ji dosazením $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ převedeme na racionální funkci argumentu $\cos x$ a provedeme substituci $\cos x = t$.

Příklad 9. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\sin x\,dx =$

$= \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\sin x\,dx$. Substitucí $\cos x = t$, $\sin x\,dx = -dt$ dostáváme $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt = +\int \frac{t^2+1-2}{1+t^2}\,dt =$

$= \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = t - 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = \cos x - 2\,\mathrm{arctg}\cos x + C.$

c) Nechť $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Dosazením $\sin x = \mathrm{tg}\,x \cdot \cos x$ dostaneme funkci $R(\mathrm{tg}\,x\cdot\cos x, \cos x)$, která je sudá vzhledem ke $\cos x$. Můžeme psát $R(\mathrm{tg}\,x\cdot\cos x, \cos x) =$ $= (R(\mathrm{tg}\,x\cdot\cos x, \cos x)\cos^2 x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$. Funkce $R(\mathrm{tg}\,x\cdot\cos x, \cos x)\cdot\cos^2 x$ je sudá vzhledem ke $\cos x$, takže ji pomocí vztahu $\cos^2 x =$ $= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ můžeme převést na racionální funkci argumentu $\mathrm{tg}\,x$. Protože $\frac{1}{\cos^2 x} = (\mathrm{tg}\,x)'$, vede v tomto případě k cíli substituce $\mathrm{tg}\,x = t$.

Příklad 10. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\,dx$. Upravíme funkci dosazením $\sin x = \mathrm{tg}\,x\cdot\cos x$: $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{(\mathrm{tg}^3 x - 1)\cos^3 x}\,dx =$

$$= \int \frac{1}{tg^3x - 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$. Substituce $tg\,x = t$: $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\, dt =$

$= \int \frac{1}{t^3 - 1}\, dt$. Protože $t^3 - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1)$, je

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1} = \frac{A(t^2+t+1) + (t-1)(Bt+C)}{t^3-1}.$$

Dosazením $t = 1$ do rovnosti $1 = A(t^2+t+1) + (t-1)(Bt+C)$ dostáváme $A = \frac{1}{3}$ a porovnáním koeficientů $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$,

takže $\int \frac{1}{t^3-1}\, dt = \int \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt = \frac{1}{3}\log|t-1| -$

$- \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2t+1) + \frac{3}{2}}{t^2+t+1}\, dt = \frac{1}{3}\log|t-1| - \frac{1}{6}\log(t^2+t+1) -$

$- \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dt = \frac{1}{3}\log|t-1| - \frac{1}{6}\log(t^2+t+1) -$

$- \frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$

Výsledek: $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\, dx = \frac{1}{3}\log|tg\,x - 1| - \frac{1}{6}\log(tg^2x +$

$+ tg\,x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{2tg\,x + 1}{\sqrt{3}} + C.$

Příklad 11. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{(tg\,x - 1)\cos x}{(tg\,x+1)\cos x}\, dx =$

$= \int \frac{tg\,x - 1}{tg\,x + 1}\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{tg\,x - 1}{tg\,x + 1}\cdot\frac{1}{1 + tg^2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$

Substitucí $tg\,x = t$, $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{t-1}{(t+1)(1+t^2)}\, dt.$

Rozklad: $\frac{t-1}{(t+1)(1+t^2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$. Porovnáním koeficientů zjistíme, že $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, tedy

$$\int \frac{t-1}{(t+1)(1+t^2)}\, dt = -\log|t+1| + \frac{1}{2}\log(t^2+1) + C.$$

Výsledek: $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = -\log|tg\,x + 1| + \frac{1}{2}\log(tg^2x + 1) + C =$

$= \log \frac{\sqrt{tg^2x + 1}}{|tg\,x + 1|} + C.$

C v i č e n í

Následující integrály převeďte vhodnými substitucemi na integrály racionálních funkcí.

261. $\int \frac{dx}{x\,(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$ **262.** $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$

263. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$ **264.** $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$

***265.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$

---

266. $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$ **267.** $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$

268. $\int \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$ **269.** $\int \frac{dx}{\cos^3 x \sin^3 x}$

270. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ **271.** $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

272. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$ **273.** $\int \frac{dx}{a \cdot \cos x + b \cdot \sin x}$

274. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$ **275.** $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos 2x}$

276. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$ **277.** $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$

278. $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x}\,dx$ **279.** $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$

280. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x}\,dx$

---

281. $\int \sqrt{x^2 - 2x - 1}\,dx$ **282.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$

283. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ **284.** $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}\,dx$

285. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}$ **286.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$

287. $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx$ ***288.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

289. $\int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ **290.** $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2+2x+2}}$

Různé integrály. Při řešení těchto příkladů použijte všech dosavadních zkušeností z integrálního počtu.

291. $\int \frac{x^4}{x^{15}-1}\,dx$

292. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

293. $\int \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$

294. $\int x\,e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

295. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

296. $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

297. $\int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$

298. $\int \sin x\,\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{3}\,dx$

299. $\int \cos x\,\cos 2x\,\cos 3x\,dx$

300. $\int \operatorname{arctg}(1+\sqrt{x})\,dx$

301. $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx$

302. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2\cos^2 x}$

303. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

304. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$

305. $\int x^2\sinh x\,dx$

306. $\int \frac{(\log x - 1)}{\log^2 x}\,dx$

307. $\int x^2 e^x \cos x\,dx$

308. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$

309. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$

310. $\int e^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}\,dx$

***311.** $\int \frac{(x^2-1)}{(x^2+1)\sqrt{1+x^4}}\,dx$

312. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$

313. $\int \frac{x\,e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

314. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

315. $\int e^{-|x|}\,dx$

316. $\int \max(1,x^2)\,dx$

317. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+4\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}}$

Nalezněte rekurentní formule pro výpočet následujících integrálů.

318. $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$ $\quad |a|\neq|b|$

319. $\int \left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$

320. $\int \cos^n x\,dx$

6. Určitý integrál

Výpočet určitého integrálu spojité funkce převedeme na výpočet neurčitého integrálu použitím základního vzorce

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

kde $F(x) = \int f(x)\,dx$. Protože výsledek nezávisí na volbě integrační konstanty C není ji třeba při tomto výpočtu uvažovat. Výraz $F(b) - F(a)$ zapisujeme často $F(x)\Big|_a^b$.

Příklad 1. $\int_2^5 \frac{1}{x}\,dx$. Zde je $F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$, takže podle základního vzorce $\int_2^5 \frac{1}{x}\,dx = F(5) - F(2) = \log 5 - \log 2 = \log\frac{5}{2}$.

Příklad 2. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Protože $F(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x$, je $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = F(1) - F(0) = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$.

Příklad 3. $\int_3^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. Pro výpočet neurčitého integrálu $F(x) = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ provedeme substituci $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, potom $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\cos t}{t}\,2t\,dt = 2\int \cos t\,dt = 2\sin t = 2\sin\sqrt{x}$.
Výsledek: $\int_3^4 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sin\sqrt{x}\Big|_3^4 = 2(\sin 2 - \sin\sqrt{3})$.

Příklad 4. $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx$. Je $\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{1}{x^2+9}\,dx = \frac{3}{2}\log(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$, proto $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx =$
$= \left(\frac{3}{2}\log(x^2+9) - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\log 10 - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\log 9 =$
$= \frac{3}{2}\log\frac{10}{9} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Příklad 5. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$. Substitucí $\cos x = t$ snadno zjistíme, že $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x|$. Proto $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx =$
$= -\log\cos\frac{\pi}{4} + \log\cos\frac{\pi}{4} = 0.$

Pro určitý integrál součtu, rozdílu a násobku konstantou platí analogické věty jako pro neurčitý integrál:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx\,,\ k \text{ konstanta.}$$

Příklad 6. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx +$
$+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}+1.$

Věta o integraci per partes a věta o substituci platí v této podobě (připomeňte si předpoklady!):

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx\,;\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Přitom u věty o substituci musí platit 1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ a 2) funkce $\varphi(t)$ musí zobrazovat interval $\langle\alpha\,,\beta\rangle$ do intervalu $\langle a, b\rangle$. Druhý z těchto předpokladů (často obtížně ověřitelný) je automaticky splněn, jakmile je splněn první z nich a derivace funkce φ je v intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ nezáporná (resp. nekladná).

Příklad 7. $\int_1^2 \log^3 x\,dx = \int_1^2 (x)'\log^3 x\,dx = x\log^3 x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot 3\log^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$
$= 2\log^3 2 - 3\left(x\log^2 x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot 2\cdot\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = 2\log^3 2 - 6\log^2 2 +$
$+6\left(x\log x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = 2\log^3 2 - 6\log^2 2 + 12\log 2 - 6.$

Příklad 8. $\int_1^{1,5}\cos(\log x)\,dx = \int_1^{1,5}(x)'\cos(\log x)\,dx = x\cos(\log x)\Big|_1^{1,5} +$
$+\int_1^{1,5} x\cdot\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = 1{,}5\cos(\log 1{,}5) - 1{,}5 + x\sin(\log x)\Big|_1^{1,5} -$
$-\int_1^{1,5}\cos(\log x)\,dx$, tedy $\int_1^{1,5}\cos(\log x)\,dx = \frac{1}{2}\,(1{,}5\cos(\log 1{,}5) - 1{,}5+$
$+\ 1{,}5\sin(\log 1{,}5)) = 0{,}75(\sin(\log 1{,}5) + \cos(\log 1{,}5)) - 0{,}75.$

Příklad 9. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$. Provedeme substituci $\sqrt{x} = t$, tj. $x = t^2$. Musí platit $4 = \alpha^2$, $9 = \beta^2$, volme tedy $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Funkce t^2 má na intervalu $\langle 2, 3\rangle$ kladnou derivaci, takže je splněn předpoklad věty o substituci a $\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx = \int_2^3\frac{t}{t-1}\,2t\,dt =$
$= 2\int_2^3\frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt = 2\int_2^3\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2\left(\frac{9}{2}+3+\log 2-2-\right.$
$\left.-\,2+\log 1\right) = 7 + 2\log 2.$

Příklad 10. $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$. Substituce $x = \sin t$ pro $t\in\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. Je $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ a funkce $\sin t$ má na intervalu

$\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ nezápornou derivaci $\cos t$. Proto podle věty o substituci

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Z uvedených příkladů je zřejmé, že při výpočtu určitého integrálu můžeme postupovat dvojím způsobem: buď nejprve vypočteme neurčitý integrál $\int f(x)\,dx$ a dosadíme do základního vzorce, nebo počítáme přímo určitý integrál s tím, že při každém použití per partes vypočteme ihned $u(x)v(x)/_a^b$ a při každém použití věty o substituci provedeme odpovídající změnu mezí.

Příklad 11. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}\, dx$. Výpočet provedeme oběma způsoby.

a) Vypočteme $F(x) = \int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}\, dx$: Substitucí $e^x = t$, $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t}\, dt$ dostáváme $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}\, dx = \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\, dt$. Integrací per partes: $\int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\, dt = \int (-\frac{1}{t})' \operatorname{arctg} t\, dt = -\frac{1}{t} \operatorname{arctg} t + \int \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt =$

$$= -\frac{1}{t} \operatorname{arctg} t + \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt = -\frac{1}{t} \operatorname{arctg} t + \log|t| - \frac{1}{2} \log(t^2+1)$$

$$F(x) = -\frac{1}{e^x} \operatorname{arctg} e^x + x - \frac{1}{2} \log(e^{2x}+1); \int_0^1 \operatorname{arctg} e^x \cdot \frac{1}{e^x}\, dx =$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg} e}{e} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{e^2+1}.$$

b) V integrálu $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}\, dx$ provedeme substituci $e^x = t$, potom $\alpha = e^0 = 1$, $\beta = e^1 = e$. Funkce $x = \log t$ má v intervalu $\langle 1, e\rangle$ kladnou derivaci, proto $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x}\, dx = \int_1^e \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\, dt$. Integrací per partes: $\int_1^e \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} \operatorname{arctg} t /_1^e + \int_1^e \frac{1}{t(t^2+1)}\, dt =$

$$= -\frac{1}{e} \operatorname{arctg} e + \operatorname{arctg} 1 + \int_1^e \frac{1}{t}\, dt - \frac{1}{2} \int_1^e \frac{2t}{t^2+1}\, dt =$$

$$= -\frac{1}{e} \operatorname{arctg} e + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{2}(\log(e^2+1) - \log 2) =$$

$$= 1 + \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} e \cdot \frac{1}{e} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{e^2+1}.$$

Je zřejmé, že délka výpočtu je v obou případech skoro stejná.

C v i č e n í

Vypočtěte hodnoty následujících integrálů použitím Newtonova vzorce:

321. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ $(0 < \alpha < \pi)$

322. $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon\cos x}$ $(0 \leq \varepsilon < 1)$

323. $\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$

324. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

325. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x} \, dx$

326. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ $(a \cdot b \neq 0)$

327. $\int_{\sinh 1}^{\sinh 2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

328. $\int_{4}^{9} \frac{y - 1}{\sqrt{y} + 1} \, dy$

329. $\int_{0}^{1} \sqrt{1 + x} \, dx$

330. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1 - \log^2 x}}$

331. $\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx$

332. $\int_{0}^{2a} \frac{3}{2b - x} \, dx$ $(b > a > 0)$

333. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{(\frac{5}{8} - x^4)^{\frac{3}{2}}} \, dx$

334. $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} \, dx$

335. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$

Vypočtěte tyto integrály použitím věty o integraci per partes pro určitý integrál:

336. $\int_{0}^{1} x e^{-x} dx$

337. $\int_{1}^{2} x \log_2 x \, dx$

338. $\int_{0}^{\pi} x^3 \sin x \, dx$

339. $\int_{0}^{a\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{a^2 + x^2}} \, dx$ $(a > 0)$

340. $\int_{1}^{e} \log^3 x \, dx$

Následující integrály vypočtěte použitím věty o substituci pro určitý integrál:

341. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

342. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$

343. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

344. $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$

345. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}\,dx$

346. $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx$

347. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

348. $\int_0^{-\log 2} \sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

349. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a > 0)$

350. $\int_{\sqrt{\frac{8}{3}}}^{2\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-2)^5}}$

Vypočtěte libovolným způsobem :

351. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

352. $\int_0^{\log 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$

353. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$

354. $\int_0^1 (\arcsin x)^4\,dx$

355. $\int_1^{16} \operatorname{arctg}\sqrt{\sqrt{x}-1}\,dx$

Najděte rekurentní formule pro následující integrály (m, n přirozená čísla):

356. $\int_1^e \log^m x\,dx$

357. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\cos^n x\,dx$

(Uvažujte zvlášť liché a sudé hodnoty čísel m, n).

358. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

359. $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$

360. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

361. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$

***362.** $\int_0^1 x^m (\log x)^n\,dx$

363. $\int_{-1}^0 x^n e^x\,dx$

364. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

365. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1} dx$

7. Nevlastní integrály

Nevlastní integrály obou typů počítáme podle definice:

Příklad 1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Podle definice je $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$
$= \lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{y\to+\infty} (\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Příklad 2. $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^y \cos x\,dx = \lim_{y\to\infty} \sin y$.

Integrál neexistuje, protože neexistuje $\lim_{y\to+\infty} \sin y$.

Příklad 3. $\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{y\to 0+} \int_y^1 \log x\,dx = \lim_{y\to 0+} (-1 - y\log y + y) =$
$= -1 - \lim_{y\to 0+} y\log y$. Podle l´Hospitalova pravidla je $\lim_{y\to 0+} y\log y =$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{\log y}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0+} (-y) = 0.$$

Výsledek: $\int_0^1 \log x\,dx = -1$.

Příklad 4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{y\to 1-} \left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + \frac{1}{2}\log 3\right) = -\infty$.

Integrál diverguje.

Často je třeba zjistit, zda daný nevlastní integrál konverguje, aniž přitom potřebujeme znát jeho hodnotu. Spojitost integrované funkce (na rozdíl od určitých integrálů) konvergenci nezaručuje, protože integrál nemusí ani existovat (viz Příklad 2) . Situace je jednodušší u funkcí, které jsou v celém integračním oboru buď nezáporné, nebo nekladné; v tomto případě nevlastní integrál vždy existuje, může však mít nekonečnou hodnotu. Abychom zjistili, zda je konvergentní nebo divergentní, používáme tzv. kriterií konvergence. Uvedeme je samostatně pro oba typy nevlastních integrálů.

A) Pro integrály typu $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ platí toto kriterium: Je-li $f(x)$ spojitá a nezáporná nebo nekladná v intervalu $\langle a, +\infty)$ a je-li pro jisté $p > 0$ limita $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)$ konečná a nenulová, potom je-li $p > 1$, pak integrál konverguje a je-li $0 < p \leq 1$, pak integrál diverguje. Je-li $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = 0$ a $p > 1$, pak integrál konverguje.

Při výpočtu konkrétních příkladů se proto snažíme najít $p > 0$ tak, aby limita $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x)$ byla konečná a nenulová. Takové číslo p existuje nejvýše jedno.

Příklad 5. $\int_0^{+\infty} \frac{5x^2+1}{x^3+4}\,dx$. Funkce je v integračním oboru kladná. Zkusíme najít číslo $p > 0$ tak, aby $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p \frac{5x^2+1}{x^3+4}$ byla konečná a nenulová. Zvolíme p tak, aby mnohočleny v čitateli i ve jmenovateli měly stejný stupeň, tedy $p = 1$, proto $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p \frac{5x^2+1}{x^3+4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x^3+x}{x^3+4} = 5$. Podle uvedeného kritéria integrál diverguje.

Příklad 6. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx$. Zvolíme opět p tak, aby ve výrazu $\frac{x^p x}{(1+x)^3}$ měl mnohočlen v čitateli stejný stupeň jako mnohočlen ve jmenovateli. Tedy $p = 2$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(1+x)^3} = 1$. Integrál konverguje.

Příklad 7. $\int_4^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}\,dx$. Zde jde o limitu výrazu $x^p \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}$ v $+\infty$. Protože funkce $\operatorname{arctg} x$ má v $+\infty$ konečnou a nenulovou limitu, volíme p tak, aby se x^p vykrátilo s $\sqrt{x}$, tedy $p = \frac{1}{2}$. Potom $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Integrál diverguje.

Příklad 8. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$. Pro libovolné číslo $p > 0$ platí $\lim \frac{x^p}{e^{2x}} = 0$, proto první části kriteria nelze použít. Podle druhé části ($\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = 0$ pro jakékoli $p > 0$, tedy např. i pro $p = 2$) integrál konverguje.

Příklad 9. $\int_2^{+\infty} \frac{x \log x}{(1+x^2)^3}\,dx$. Funkci $x^p \frac{x \log x}{(1+x^2)^3}$ můžeme psát ve tvaru $\frac{x^{p+2}}{(1+x^2)^3} \cdot \frac{\log x}{x}$. Protože $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ a pro $p+2 < 6$ je $\lim \frac{x^{p+2}}{(1+x^2)^3} = 0$, volíme p tak, aby $p > 1$, $p+2 < 6$, např. $p = 3$, a potom podle druhé části kritéria integrál konverguje.

Integrál $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ převedeme substitucí $x = -t$ na integrál $\int_{-b}^{+\infty} f(x)\,dx$, na který lze (je-li $f(x)$ nezáporná nebo nekladná) použít našeho kritéria.

Příklad 10. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^3}{x^5+1}\,dx$. Hodnota tohoto integrálu (existuje -li) je rovna $\int_{2}^{+\infty} \frac{(-t)^3}{(-t)^5+1}\,dt = \int_{2}^{+\infty} \frac{t^3}{t^5+1}\,dt$. Protože $\lim_{t\to\infty} t^2 \frac{t^3}{t^5-1} = 1$, integrál konverguje.

Někdy lze použít těchto dvou kritérií: 1) Konverguje-li $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|\,dx$, konverguje i $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, 2) Je-li $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro $x \in \langle a, +\infty)$, potom konverguje-li $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$, konverguje i $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ a diverguje-li $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, diverguje i $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$.

Příklad 11. $\int_{0}^{+\infty} \cos 3x\, e^{-2x}\,dx$. Podle kritéria 1) stačí zjistit, že integrál $\int_{0}^{+\infty} |\cos 3x\, e^{-2x}|\,dx$ konverguje. Protože $|\cos 3x\, e^{-2x}| \leq e^{-2x}$ a integrál $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ konverguje (Příklad 8) , konverguje podle kritéria 2) i integrál $\int_{0}^{+\infty} |\cos 3x\, e^{-2x}|\,dx$

B) Pro integrály typu $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, kde funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná nebo nekladná v intervalu $\langle a, b)$ a má nevlastní limitu zleva v bodě b, platí toto kritérium: jestliže pro jisté $p > 0$ je limita $\lim_{x\to b-} (b-x)^p f(x)$ konečná a nenulová, potom pro $0 < p < 1$ integrál konverguje a pro $p \geq 1$ diverguje. Je-li $\lim_{x\to b-} (b-x)^p f(x) = 0$ a $0 < p < 1$, pak integrál konverguje. Je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná (nekladná) v intervalu $(a, b\rangle$ a má nevlastní limitu zprava v bodě a, počítáme místo $\lim_{x\to b-} (b-x)^p f(x)$ limitu $\lim_{x\to a+} (x-a)^p f(x)$ a ostatní zůstává v platnosti. Číslo p, pro které je limita konečná a nenulová, existuje opět nejvýše jedno.

Příklad 12. $\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Funkce má nevlastní limitu zleva v bodě 1. Hledáme proto číslo p tak , aby $\lim_{x\to 1-} (1-x)^p \frac{x}{(1-x)^{1/2}}$ $= \lim_{x\to 1-} (1-x)^p \frac{x}{(1-x)^{1/2}}$. byla konečná a nenulová. Zřejmě je vhodné odstranit výraz $(1-x^2)^{1/2}$ ve jmenovateli, čehož dosáhneme volbou $p=\frac{1}{2}$, neboť pak se vykrátí: $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^p\frac{x}{(1-x)^{1/2}}=$ $=\lim\limits_{x\to 1-}x=1$. Protože $p=\frac{1}{2}<1$, integrál podle kritéria konverguje.

Příklad 13. $\int_0^1\frac{\cos x}{x}\,dx$. Integrál má nevlastní limitu zprava v bodě 0. Hledáme proto p tak, aby $\lim\limits_{x\to 0+}(x-0)^p\frac{\cos x}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0+}x^p\frac{\cos x}{x}$ byla konečná a nenulová. Volíme p opět tak, aby se vykrátilo x ve jmenovateli, tedy $p=1$, potom $\lim\limits_{x\to 0+}x^p\frac{\cos x}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0+}\cos x=1$. Integrál diverguje.

Příklad 14. $\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Protože $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\arcsin x}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}}$, volíme $p=\frac{1}{2}$, potom $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^p\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 1-}\frac{\arcsin x}{(1+x)^{1/2}}=$ $=\frac{\arcsin 1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Integrál konverguje.

Příklad 15. $\int_1^2\frac{1}{x\log x}\,dx$. Pro libovolné $p>0$ je

$$\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^p}{x\log x}=\lim_{x\to 1+}\frac{p(x-1)^{p-1}}{\log x+1}=\lim_{x\to 1+}p(x-1)^{p-1}.$$

Tato limita bude konečná a nenulová právě když $p=1$. Proto integrál diverguje.

Příklad 16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}}\,dx$. Nejprve upravíme integrovanou funkci:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}-x}}.$$

Protože $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-}\sqrt[3]{\frac{\frac{\pi}{4}-x}{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{(\cos x)'_{\frac{\pi}{4}}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[6]{2}$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^p\frac{1}{\sqrt[3]{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}\sqrt[6]{2}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^{p-\frac{1}{3}}$$

Tato limita bude konečná a nenulová pro $p=\frac{1}{3}$. Integrál konverguje.

Příklad 17. Zjistěte, pro které hodnota $a>0$ integrál $\int_0^1\frac{\sin x}{x^a}dx$ konverguje. Nechť $p>0$, potom $\lim\limits_{x\to 0+}x^p\frac{\sin x}{x^a}d=$ $=\lim\limits_{x\to 0+}x^{p-a+1}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}x^{p-a+1}$(protože $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1$).

Tato limita je konečná a nenulová právě když $p-a+1=0$, tj. $p=a-1$. Protože $p>0$, může tento případ nastat jen pro

$a > 1$. Je-li $0 < p = a - 1 < 1$, tj. $1 < a < 2$, integrál konverguje, je-li $p = a - 1 \geq 1$, tj. $a \geq 2$, integrál diverguje. Ve zbývajícím případě $0 < a \leq 1$ je pro každé $p > 0$, $\lim\limits_{x \to 0_+} x^p \frac{\sin x}{x^a} = 0$, speciálně i např. pro $p = \frac{1}{2} < 1$, tedy integrál konverguje. Závěr: integrál konverguje pro $0 < a < 2$, diverguje pro $a \geq 2$.

V některých případech lze použít rovněž kritérií, která jsme pod čísly 1), 2) uvedli v části A.

Existuje-li v integračním oboru více bodů, v nichž má funkce nevlastní jednostrannou limitu, je třeba jej rozdělit na intervaly, z nichž každý obsahuje jen jeden takový bod (neboť naše kritéria jsou formulována jen pro tento případ).

Příklad 18. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. Funkce má nevlastní limitu (jednostrannou) v bodech 0 a 1. Rozdělíme proto integrál na dva:

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

(místo $\frac{1}{2}$ jsme ovšem mohli vzít libovolné jiné číslo z intervalu $(0, 1)$). U prvního integrálu pro libovolné $p > 0$ platí

$$\lim_{x \to 0_+} x^p \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\log x}{x^{-p}} = \lim_{x \to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{(-p)\, x^{-p-1}} = -\frac{1}{p} \lim_{x \to 0} x^p = 0,$$

tedy integrál $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ konverguje. U druhého integrálu je

$$\lim_{x \to 1_-} (1-x)^p \frac{\log x}{(1-x)^{1/2}(1+x)^{1/2}} = 0 \qquad \text{pro } p = \tfrac{1}{2}, \text{ tedy } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

rovněž konverguje. Výsledek: Integrál konverguje.

Analogicky můžeme zjišťovat konvergenci i u integrálů s nevlastní mezí, jejichž integrační obor obsahuje body, v nichž má funkce nevlastní limitu.

Příklad 19. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\, dx$ rozepíšeme ve tvaru $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\, dx + \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\, dx + \int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\, dx$. Integrál $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\, dx$ konverguje, avšak integrály $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\,dx$, $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\,dx$ divergují, proto celý integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x-1)^2}\,dx$ je divergentní.

C v i č e n í

A) Integrály s nevlastní mezí.

Rozhodněte o konvergenci, resp. divergenci následujících integrálů. U příkladů 366-385 konvergentní integrály vypočtěte.

366. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$

367. $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\, dx$

368. $\int_0^{\infty} x \sin x\, dx$

369. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$

370. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

371. $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$

372. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$

373. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

374. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx$

375. $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

376. $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx$

377. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

378. $\int_2^{\infty} \frac{\log x}{x}\, dx$

379. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

380. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

381. $\int_0^{\infty} e^{-ax}\, dx \qquad (a > 0)$

382. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2}\, dx$

383. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\, dx$

384. $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$

385. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

386. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\, dx$

387. $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\, dx$

388. $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx$

389. $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\, dx$

390. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \log \log x}$

391. $\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\, dx$

392. $\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+1)}{x}\, dx$

393. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\, dx$

394. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$

395. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\, dx$

B) Integrály s neomezeným integrandem.

Vyšetřete konvergenci, resp. divergenci následujících integrálů. Konvergentní integrály z příkladů 396 - 405 vypočtěte.

396. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \log^2 x}$

397. $\int_1^2 \frac{dx}{x \log x}$

398. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}$

399. $\int_0^1 x \log x \, dx$

400. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

401. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$

402. $\int_3^5 \frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}} \, dx$

403. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

404. $\int_{-1}^1 \frac{\log(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

405. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \, dx$

406. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \, dx$

407. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<b)$

408. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} \, dx$

409. $\int_0^1 \log x \, dx$

410. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} \, dx$

411. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} \, dx$

412. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$

413. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} \, dx$

414. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$

415. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\sqrt{x}} \, dx$

416. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \, dx$

417. $\int_0^2 \frac{dx}{\log x}$

418. $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2} \, dx$

419. $\int_0^1 x^p \log^q \frac{1}{x} \, dx$

***420.** $\int_{-1}^1 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

Různé příklady

421. Pro jaké hodnoty k je $\int_1^\infty x^k \frac{x+\sin x}{x-\sin x} \, dx$ konvergentní?

422. Pro jaké hodnoty k konvergují integrály

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^k \log x} \quad \text{a} \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^k} \ ?$$

423. Pro jaké hodnoty m konverguje integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\, dx \ ?$$

424. Pro jaká k konverguje $\int_0^\pi \frac{dx}{\sin^k x}$?

425. $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

426. $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ $\quad n$ přirozené

427. $\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ $\quad n$ přirozené

428. $\int_0^1 \log^n x\, dx$ $\quad n$ přirozené

429. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}\, dx$

430. $\int_1^\infty \frac{dx}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ $\quad (0<\alpha<2\pi)$

* **431.** $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$

* **432.** $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\, dx$ $\quad (a>0,\ b>0)$

* **433.** $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$

8. Diferenciální rovnice 1. řádu

V tomto oddílu uvedeme metody řešení některých spec. .lních diferenciálních rovnic 1. řádu: rovnic na separaci proměnných, homogenních rovnic a rovnic tvaru $y' = \frac{ax + by + f}{cx + dy + g}$. Při integracích, které se vyskytnou v průběhu řešení, nesmíme zapomenout na integrační konstantu, která je důležitou součástí výsledku.

A) Rovnice na separaci proměnných mají tvar $y' = f(x)g(y)$; pravou stranu lze tedy rozložit na součin dvou funkcí, z nichž jedna obsahuje pouze x a druhá pouze y. zvláštním případem této rovnice pro $f(x) = 1$ je rovnice $y' = g(y)$, v níž se na pravé straně nevyskytuje proměnná x.

Příklad 1. Rovnice $y' = \frac{y}{x}$, $y' = \frac{-xy}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y' = \frac{y^2 - 3y}{x}$, $y' = \frac{1 - x^2}{2xy}$ jsou rovnice na separaci proměnných, kdežto např. rovnice $y' = \frac{y-x}{y+x}$, $y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$ nikoliv.

Rovnici $y' = f(x)g(y)$ řešíme v těchto krocích: 1) přepíšeme y' na $\frac{dy}{dx}$, tím dostaneme $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, 2) v této rovnici převedeme členy, obsahující y, na levou stranu a členy, obsahující x, na stranu pravou: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$, 3) provedeme integraci $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$, 4) ze získané rovnosti vyjádříme y jako funkci x (někdy tento krok nelze provést) . Při tomto postupu jsme předpokládali, že $g(y) \neq 0$. Je-li $g(y_0) = 0$ pro jisté číslo y_0 , pak konstantní funkce $y = y_0$ je řešením původní rovnice. Takto získaná řešení lze někdy ještě navzájem "slepovat", to však zde pro jednoduchost nebudeme brát v úvahu.

Příklad 2. Řešte rovnici $y' = \frac{1 - 2x}{y^2}$. Jde o rovnici na separaci proměnných, neboť $\frac{1-2x}{y^2} = (1 - 2x)\cdot\frac{1}{y^2}$. Provedeme jednotlivé kroky: 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{y^2}$, 2) převedeme y na levou, x na pravou stranu: $y^2\,dy = (1-2x)\,dx$, 3) integrace: $\int y^2 dy = \int (1-2x)\,dx$, přitom $\int y^2 dy = \frac{y^3}{3}$, $\int (1-2x)\,dx = x - x^2 + C$, tedy $\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$, $y = \sqrt[3]{3(x - x^2 + C)}$. Tímto vzorcem jsou dána všechna řešení dané rovnice[1].

Příklad 3. $y' = 1 + y^2$. Jde o speciální případ rovnice se separovanými proměnnými, kde pravá strana neobsahuje x. Rovnici řešíme stejným způsobem: 1) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, 2) $\frac{dy}{1+y^2} = dx$, 3) $\int \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y = \int dx = x + C$. 4) Ze získané rovnice $\operatorname{arctg} y = x + C$ plyne, že musí být $x + C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (neboť $\operatorname{arctg} y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$), tedy $x \in (-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C)$ (povšimněte si, že definiční obor řešení závisí na hodnotě konstanty C !). Potom $y = \operatorname{tg}(x + C)$, což jsou všechna řešení rovnice.

Příklad 4. $y' = -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$, tj. $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$. Zde je $g(y) = y$ Protože $g(0) = 0$, je konstantní funkce $y = 0$ řešením. Pro $y \neq 0$ je $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\int \frac{dy}{y} = \log|y| = \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$. Z rovnosti $\log|y| = \sqrt{1-x^2} + C$ plyne $|y| = e^C \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$. Protože C je libovolná konstanta, je e^C libovolné kladné číslo, $-e^C$ libovolné záporné číslo. Obě řešení můžeme shrnout vzorcem $y = K e^{\sqrt{1-x^2}}$, kde buď $K > 0$ nebo $K < 0$. Protože hodnotě $K = 0$ odpovídá výšeuvedené řešení $y = 0$, jsou ve vzorci $y = K e^{\sqrt{1-x^2}}$, kde K je libovolná konstanta, $x \in (-1, 1)$, obsažena všechna řešení dané rovnice.

Příklad 5. $y' = \frac{1+2y}{\operatorname{tg} x}$. Protože $1 + 2y = 0$ pro $y = -\frac{1}{2}$, je konstantní funkce $y = -\frac{1}{2}$ řešením . Pro $y \neq -\frac{1}{2}$ je $\frac{dy}{1+2y} = \operatorname{cotg} x\,dx$, $\int \frac{dy}{1+2y} = \frac{1}{2}\log|1+2y| = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \log|\sin x| + C$. Z rovnosti $\frac{1}{2}\log|1+2y| = \log|\sin x| + C = \log\sqrt{|1+2y|} =$ plyne $e^{\log\sqrt{|1+2y|}} = e^{\log|\sin x| + C}$, tedy

[1]) "slepování" řešení nebereme v úvahu.

$\sqrt{|1+2y|} = e^C|\sin x|$, tedy buď $1+2y = e^{2C}\sin^2 x$ nebo $1+2y = -e^{2C}\sin^2 x$. Analogicky jako v předchozím příkladu můžeme oba případy shrnout vztahem $1+2y = K\sin^2 x$, kde $K>0$ nebo $K<0$. Hodnotě $K=0$ odpovídá konstantní řešení $y=-\frac{1}{2}$, proto každé řešení naší rovnice je tvaru $y = \frac{1}{2}(K\sin^2 x - 1)$, kde K je libovolná konstanta.

Příklad 6. $y' = \dfrac{y^2-3y}{x}$. Tato rovnice má konstantní řešení $y=0$, $y=3$. Pro $y\neq 0$, $y\neq 3$ je $\dfrac{dy}{y^2-3y} = \dfrac{dx}{x}$, $\int \dfrac{dy}{y^2-3y} = \int \dfrac{dx}{x} = \log|x| + C$. Přitom $\int\dfrac{dy}{y^2-3y} = \int\dfrac{dy}{y(y-3)} = \dfrac{1}{3}\int\dfrac{y-(y-3)}{y(y-3)}dy = \dfrac{1}{3}\int\left(\dfrac{1}{y-3}-\dfrac{1}{y}\right)dy = \dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{y-3}{y}\right| = \log\sqrt[3]{\left|\dfrac{y-3}{y}\right|}$,

tedy $\log\sqrt[3]{\left|\dfrac{y-3}{y}\right|} = \log|x| + C$, $\sqrt[3]{\left|\dfrac{y-3}{y}\right|} = e^C|x|$, $\left|\dfrac{y-3}{y}\right| = e^{3C}|x|^3$,

$\dfrac{y-3}{y} = Kx^3$, $K\neq 0$, $y = \dfrac{3}{1-Kx^3}$.

Daná rovnice má tedy konstantní řešení $y=0$, $y=3$ a pro libovolné $K\neq 0$ řešení $y = \dfrac{3}{1-Kx^3}$ pro $x\in\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{K}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt[3]{K}}, +\infty\right)$

Hodnotu konstanty můžeme určit, je-li předepsána funkční hodnota v určitém bodě:

Příklad 7. Nalezněte řešení rovnice $y' = \dfrac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$, pro které je $y(1)=1$. Separací proměnných dostáváme $\int\dfrac{y}{1+y^2}dy = \int\dfrac{1}{x(1+x^2)}dx$; protože $\int\dfrac{y}{1+y^2}dy = \dfrac{1}{2}\log(1+y^2)$, $\int\dfrac{1}{x(1+x^2)}dx = \log\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$, je $\log\sqrt{1+y^2} = \log\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$,

odtud $\sqrt{1+y^2} = e^C\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$, $1+y^2 = e^{2C}\dfrac{x^2}{1+x^2} = K\dfrac{x^2}{1+x^2}$, kde $K>0$, $y^2 = \dfrac{(K-1)x^2-1}{1+x^2}$; každé řešení tedy je tvaru

$y = \sqrt{\dfrac{(K-1)x^2-1}{1+x^2}}$, $y = -\sqrt{\dfrac{(K-1)x^2-1}{1+x^2}}$. Z podmínky $y(1)=1$ dosazením dostáváme $1 = \dfrac{K-2}{2}$, $K=4$, tedy $y = \sqrt{\dfrac{3x^2-1}{1+x^2}}$ pro $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

B) Homogenní diferenciální rovnicí nazýváme rovnici $y' = f(x,y)$, kde $f(x,y)$ je homogenní funkce. Funkce $f(x,y)$

je podle definice homogenní, jestliže pro každé $k \neq 0$ je $f(kx, ky) = f(x, y)$. V praxi je vhodnější používat tohoto kriteria: funkce je homogenní, jestliže (pro $x \neq 0$) ji lze upravit tak, že žádná z proměnných x, y se v ní nevyskytuje jinak, než v podílu $\frac{y}{x}$.

Příklad 8. Ověřte, že funkce $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{y}{x}(\log y - \log x)$, $\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}$ jsou ve svém definičním oboru homogenní. Upravíme jednotlivé výrazy: $\frac{x-y}{x+y} = \frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+y}{x}} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$, $\frac{y}{x}(\log y - \log x) = \frac{y}{x}\log\frac{y}{x}$, $\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2} = \frac{(\frac{y}{x})^2-2\frac{y}{x}-1}{(\frac{y}{x})^2+2\frac{y}{x}-1}$, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x} = \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}$ pro $x>0$, $\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x} = -\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}$ pro $x<0$. Všechny výsledné výrazy obsahují proměnné x, y pouze v podílu $\frac{y}{x}$, proto jsou dané funkce homogenní.

Homogenní diferenciální rovnici $y' = f(x, y)$ řešíme takto: 1) nejprve upravíme funkci na pravé straně tak, aby se v ní proměnné x, y vyskytovaly pouze v podílu $\frac{y}{x}$, 2) zavedeme novou funkci $z = \frac{y}{x}$; potom $y = xz$, takže $y' = z + xz'$, 3) do upravené pravé strany rovnice dosadíme z za $\frac{y}{x}$, na levé straně rovnice nahradíme podle 2) y' výrazem $z + xz'$. Tím dostaneme rovnici na separaci proměnných pro neznámou funkci z, kterou vyřešíme podle A) a nakonec vypočteme y ze vztahu $y = xz$. Tím dojdeme ke všem řešením původní rovnice.

Příklad 9. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Zde je pravá strana již v požadovaném tvaru, takže krok 1) odpadá. 2) Zavedeme novou pomocnou funkci $z = \frac{y}{x}$, potom $y' = (xz)' = z + xz'$, 3) dosazením do původní rovnice dostáváme $z + xz' = e^z + z$, tedy $z' = \frac{1}{x}e^z$, což je rovnice na separaci proměnných. Je $e^{-z}dz = \frac{1}{x}dx$, tedy $\int e^{-z}dz = -e^{-z} = \int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$, $e^{-z} = -\log|x| + C$, $z = -\log(-\log|x| - C)$,

$y = xz = -x \log(-\log|x| - C)$. Přitom musí být $x \neq 0$, $-\log|x| - C > 0$, tedy $0 < |x| < e^{-C}$.

Příklad 10. $y' = \frac{y}{x}(\log y - \log x)$. Aby měl výraz na pravé straně smysl, musí být $y > 0$, $x > 0$. Potom $y' = \frac{y}{x} \log \frac{y}{x}$. Položíme opět $z = \frac{y}{x}$, $y' = z + xz'$, $z + xz' = z \log z$, $z' = \frac{1}{x}(z \log z - z)$. Tato rovnice na separaci proměnných má dvě konstantní řešení $z = 0$, $z = e$, jimž odpovídají funkce $y = 0$, $y = ex$. Vzhledem k podmínce $y > 0$ však funkce $y = 0$ není řešením; funkce $y = ex$ je pro $x > 0$ řešením původní rovnice. Nechť $z \neq 0$, $z \neq e$; potom

$$\frac{1}{z \log z - z} dz = \frac{1}{x} dx, \int \frac{1}{z \log z - z} dz = \int \frac{1}{\log z - 1} \cdot \frac{1}{z} dz =$$
$$= \log|\log z - 1| = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C \ , |\log z - 1| = e^C |x|,$$
$$\log z - 1 = Kx \ , K \neq 0, z = e^{1 + Kx}, y = xz = xe^{1 + Kx}, K \neq 0.$$

Protože hodnotě $K = 0$ odpovídá řešení $y = ex$, je každé řešení naší rovnice dáno vzorcem $y = xe^{1 + Kx}$, K libovolná konstanta.

Příklad 11. $y' = \frac{x - y}{x + y}$. Zde musí být $y \neq -x$. Protože $\frac{x - y}{x + y} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$, dostáváme po dosazení $z = \frac{y}{x}$ rovnici $z + xz' = \frac{1 - z}{1 + z}$,

$z' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - 2z - z^2}{1 + z}$. Tato rovnice na separaci proměnných má dvě konstantní řešení $z_1 = -1 + \sqrt{2}$, $z_2 = -1 - \sqrt{2}$, jimž odpovídají řešení $y_1 = (\sqrt{2} - 1)x$, $y_2 = -(1 + \sqrt{2})x$ původní rovnice. Pro $z \neq z_1, z \neq z_2$ je

$$\int \frac{1 + z}{1 - 2z - z^2} dz = -\frac{1}{2} \log|1 - 2z - z^2| =$$
$$= \int \frac{1}{x} dx + C = \log|x| + C, \frac{1}{\sqrt{|1 - 2z - z^2|}} = e^C |x|,$$

$1 - 2z - z^2 = \frac{1}{Kx^2}$, $K \neq 0$. Funkci z vypočteme řešením kvadratické rovnice $z^2 + 2z + \frac{1}{Kx^2} - 1 = 0$: $z = -1 \pm \sqrt{2 - \frac{1}{Kx^2}}$. Protože K je libovolná nenulová konstanta, můžeme psát $\frac{1}{K} = L$, kde L je libovolná nenulová konstanta. Potom $y = xz = -x \pm x\sqrt{2 - \frac{L}{x^2}}$. Musí být $2 - \frac{L}{x^2} > 0$, tedy $x^2 > \frac{L}{2}$. Při daném L máme tedy pro $x^2 > \frac{L}{2}$ toto řešení:

$$y = -x + \sqrt{2x^2 - L}$$
$$y = -x - \sqrt{2x^2 - L}$$

Protože hodnotě $L = 0$ odpovídají řešení y_1, y_2, jsou uvedenými vzorci vyčerpána všechna řešení naší rovnice (při libovolném L).

C) U diferenciální rovnice $y' = \dfrac{ax + by + f}{cx + dy + g}$ rozlišíme několik případů:

1) Nechť $ad \neq bc$.

1.1) Je-li $f = g = 0$, pak jde o homogenní rovnici $y' = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$.

1.2) Je-li alespoň jedno z čísel f, g nenulové, zavedeme novou proměnnou t a novou funkci z rovnicemi $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$, kde α, β jsou zatím neurčené konstanty. Dosazením do původní rovnice dostáváme

$$z' = \frac{at + bz + (a\alpha + b\beta + f)}{ct + dz + (c\alpha + d\beta + g)}$$

Čísla α, β nyní volíme tak, aby bylo $a\alpha + b\beta + f = 0$, $c\alpha + d\beta + g = 0$. Podmínka $ad \neq bc$ přitom zaručuje, že tato soustava rovnic o dvou neznámých α, β má řešení. Tím jme naši rovnici převedli na rovnici $z' = \dfrac{at + bz}{ct + dz}$, což je typ 1.1). Ve výsledku musíme ovšem přejít k x, y dosazením $t = x - \alpha$, $z = y - \beta$.

2) Nechť $ad = bc$.

2.1) Je-li $c = d = 0$, jde o rovnici $y' = \dfrac{a}{g}x + \dfrac{b}{g}y + \dfrac{f}{g}$, kterou převedeme zavedením pomocné funkce $z = \dfrac{a}{g}x + \dfrac{b}{g}y + \dfrac{f}{g}$ na rovnici $z' = \dfrac{b}{g}z + \dfrac{a}{g}$, což je rovnice na separaci proměnných.

2.2) Nechť aspoň jedno z čísel c, d je nenulové, např. $c \neq 0$. Potom z podmínky $ad = bc$ plyne $b = \dfrac{ad}{c}$, tedy $y' = \dfrac{ax + by + f}{cx + dy + g} = \dfrac{\frac{a}{c}(cx + dy) + f}{(cx + dy) + g}$. Je-li $d = 0$, jde o rovnici $y' = h(x)$, kterou řešíme integrací. Je-li $d \neq 0$, potom zavedením nové funkce $z = cx + dy$ převedeme rovnici na tvar $z' = d\dfrac{\frac{a}{c}z + f}{z + g}$, což je rovnice na separaci proměnných.

Příklad 12. $y' = \dfrac{y + x + 3}{x + 1}$. Zde je $ad \neq bc$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, jde tedy o případ 1.2). Položme $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$, potom $z' = \dfrac{t + z + \alpha + \beta + 3}{t + \alpha + 1}$. Čísla α, β zvolíme tak, aby bylo $\alpha + \beta + 3 = 0$, $\alpha + 1 = 0$, tj. $\alpha = -1$, $\beta = -2$. Pak jde o rovnici $w' = \dfrac{t + z}{t} = 1 + \dfrac{z}{t}$, což je homogenní rovnice. Zavedeme novou funkci $w = \frac{z}{t}$, potom $z' = (tw)' = w + tw'$, tedy $w + tw' = 1 + w$, $w' = \frac{1}{t}$, $w = \log|t| + C$, $z = tw = t(\log|t| + C)$.

Protože $x = t + \alpha = t - 1$, $y = z + \beta = z - 2$, je $t = x + 1$, $y = y + 2$, takže dosazením dostáváme $y + 2 = (x + 1)(\log|x + 1| + C)$, $y = (x + 1)(\log|x + 1| + C) - 2$.

Příklad 13. $y' = \dfrac{2x + 4y + 3}{x + 2y + 1}$. Tato rovnice odpovídá případu 2.2). Protože $\dfrac{2x + 4y + 3}{x + 2y + 1} = \dfrac{2(x + 2y) + 3}{x + 2y + 1}$, zavedeme novou funkci $z = x + 2y$, potom $y' = \frac{1}{2} z'$, tedy $\frac{1}{2} z' = \dfrac{2z + 3}{z + 1}$, $\dfrac{z + 1}{2z + 3}\, dz = 2\, dx$,

$$\int \frac{z + 1}{2z + 3}\, dz = \frac{1}{2} \int \frac{2z + 3 - 1}{2z + 3}\, dz = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{2z + 3}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{2}(z - \log|2z + 3|) = \int 2\, dx = 2x + C .$$

Dosazením $x + 2y = z$ dostáváme $\frac{1}{2}(x + 2y - \log|2x + 4y + 3|) = 2x + C$. Z této rovnice nelze vypočítat y jako funkci x, musíme se proto spokojit s výsledkem v tomto tvaru.

C v i č e n í

Rovnice na separaci proměnných. V rovnicích 434 - 442 najděte všechna řešení:

434. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}} = 0$

435. $y' = -\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

436. $y' = \frac{a+y}{tg\, x}$

437. $y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}$

438. $y' = \frac{1-2x}{y^2}$

439. $y' = \frac{y^2-y}{x}$

440. $s' = e^s - 1$

441. $y' = 10^{x+y}$

442. $y' = \frac{xy^2+x}{x^2y-y}$

443. Závislost mezi rychlostí $\frac{dl}{dt}$ náboje a drahou l, kterou prošel v hlavni děla, je v balistice popsána rovnicí

$$\frac{dl}{dt} = \frac{al^n}{b+l^n} \qquad (n<1)$$

Najděte řešení této rovnice za počáteční podmínky $l(0)=0$.

444. Rychlost rozkladu jodovodíku je popsána rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = k_1\left(\frac{1-x}{v}\right)^2 - k_2\left(\frac{x}{v}\right)^2$$

kde x je množství HJ, které se rozložilo v čase t, k_1, k_2 a v jsou konstanty. Najděte závislost x na t.

Najděte řešení diferenciálních rovnic, která vyhovují daným počátečním podmínkám.

445. $y' = \cotg y \; tg\, x \;;\quad y(0) = \frac{\pi}{4}$

446. $y' = \frac{y-b}{bx^2+x} \;;\quad y(1) = 1$

447. $y' = \frac{y \log y}{\sin x} \;;\quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

448. Hmotný bod o hmotě 10^{-3} kg se pohybuje přímočaře a působí na něj síla přímo úměrná času (počínaje $t = 0s$) a nepřímo úměrná rychlosti. V čase $t = 10s$ byla rychlost hmotného bodu 0,50 m/s a síla byla 4.10^{-5} N. Jakou rychlost bude mít hmotný bod v čase $t = 60s$?

Homogenní rovnice. Najděte všechna řešení těchto rovnic.

449. $y' = \frac{1}{x}\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

450. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

451. $y' = \frac{y}{x - y}$

452. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

453. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

454. $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$

455. $y' = \frac{y}{x} \log \frac{y}{x}$

456. $y' = \frac{y}{x} + \frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}$

457. $y' = \frac{3y^2 + 3xy + x^2}{x^2 + 2xy}$

458. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

V příkladech 459 - 463 nalezněte ta řešení diferenciálních rovnic, které vyhovují daným počátečním podmínkám:

459. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$; $y(1) = 0$

460. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$; $y(0) = -1$

461. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$; $y(0) = 1$

***462.** Jaký tvar musí mít zrcadlo projektoru, aby světelné paprsky, vycházející z bodového zdroje, byly zrcadlem odraženy paralelně s osou zrcadla?

463. Řešte rovnici $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$. Jaká musí být funkce aby řešení dané rovnice mělo tvar $y = \frac{x}{\log|Cx|}$?

464. $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$

465. $y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$

466. $y' = \frac{x + y + 1}{2x + 2y - 1}$

467. $y' = \frac{2(y + 2)^2}{(x + y - 1)^2}$

468. $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$

9. Lineární diferenciální rovnice 1. a 2. řádu

A) Lineární diferenciální rovnice 1. řádu má obecný tvar $y' + p(x)y = f(x)$, kde $p(x), f(x)$ jsou dané funkce (např. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y' + e^x y = e^{2x}$ atd.). Při jejím řešení hraje důležitou roli tzv. homogenní rovnice [1], což je stejná rovnice s nulovou pravou stranou: $y' + p(x)y = 0$ (slova "homogenní" je zde použito v jiném smyslu než dříve). Platí totiž, že obecné řešení původní rovnice je součtem obecného řešení homogenní rovnice a jednoho (tzv. partikulárního) řešení původní rovnice. Obecné řešení původní rovnice nalezneme snadno, neboť jde o rovnici $y' = -p(x)y$, což je rovnice na separaci proměnných. K nalezení jednoho řešení původní rovnice používáme tzv. metodu variace konstant. V obecném řešení původní rovnice se vyskytuje jistá konstanta; partikulární řešení původní rovnice hledáme ve tvaru obecného řešení homogenní rovnice, přičemž konstantu považujeme za neznámou funkci. Dosazením do původní rovnice vypočteme tuto funkci a tím i partikulární řešení. Postup bude zřejmý z dalších příkladů:

Příklad 1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. Nejprve řešíme homogenní rovnici $y' + 2xy = 0$, což je rovnice na separaci proměnných $y' = -2xy$, $\frac{1}{y}\,dy = -2x\,dx$, $\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| = \int -2x\,dx = -x^2 + C$, $y = Ke^{-x^2}$.

Partikulární řešení původní rovnice hledáme ve stejném tvaru $y = Ke^{-x^2}$, přitom však předpokládáme, že K je jistá neznámá funkce $K(x)$. Vypočteme y' a dosadíme do původní rovnice: $y' = K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2}(-2x)$, dosazením $K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2}(-2x) +$

[1] Někdy také "rovnice bez pravé strany".

$+ 2x K(x) e^{-x^2} = x e^{-x^2}$, $K'(x) e^{-x^2} = x e^{-x^2}$, $K'(x) = x$,
$K(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$. Při této integraci není třeba uvažovat integrační konstantu, protože nám jde o nalezení jediného řešení.
Známe-li funkci $K(x)$, vypočteme partikulární řešení
$y = K(x) e^{-x^2} = \frac{x^2}{2} e^{-x^2}$. Obecné řešení naší rovnice je součtem obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení, tedy
$y = K e^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2} = (K + \frac{x^2}{2}) e^{-x^2}$.

Z tohoto příkladu je patrná základní myšlenka metody variace konstant: při výpočtu partikulárního řešení se po dosazení do původní rovnice vyruší členy, obsahující $K(x)$, a zůstane jen člen s $K'(x)$; neznámou funkci $K(x)$ potom snadno vypočteme integrací.

Příklad 2. $y' + \frac{y}{x(x+1)} = 1$. Homogenní rovnice: $y' - \frac{y}{x(x+1)} = 0$,
$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x(x+1)} dx$, $\int \frac{1}{y} dy = \log|y| = \int \frac{1}{x(x+1)} dx =$
$= \int \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}) dx = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$, $y = K \frac{x}{x+1}$.
Partikulární řešení hledáme opět ve tvaru $y = K(x) \cdot \frac{x}{x+1}$, po dosazení $K'(x) \frac{x}{x+1} + K(x) \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x(x+1)} K(x) \frac{x}{x+1} = 1$.
Členy s $K(x)$ se vyruší a zůstává $K'(x) \cdot \frac{x}{x+1} = 1$,
$K(x) = \int \frac{x+1}{x} dx = x + \log|x|$, tedy partikulární řešení je
$y = K(x) \frac{x}{x+1} = \frac{x(x + \log|x|)}{x+1}$, obecné řešení původní rovnice
$y = K \frac{x}{x+1} + \frac{x(x + \log|x|)}{x+1} = (K + x + \log|x|) \frac{x}{x+1}$,
kde K je libovolná konstanta.

Příklad 3. $y' + e^x y = e^{2x}$. Homogenní rovnice: $y' + e^x y = 0$,
$y' = -e^x y$, $\int \frac{dy}{y} = \log|y| = \int -e^x dx = -e^x + C$, $y = K e^{-e^x}$.
Pro výpočet partikulárního řešení položíme $y = K(x) e^{-e^x}$, potom
$y' = K'(x) e^{-e^x} + K(x) e^{-e^x} \cdot (-e^x)$, po dosazení $K'(x) e^{-e^x} - K(x) e^{-e^x} e^x +$
$+ e^x \cdot K(x) e^{-e^x} = e^{2x}$. $K(x) e^{-e^x} = e^{2x}$. Členy obsahující $K(x)$ se opět vyruší a zůstává $K'(x) e^{-e^x} = e^{2x}$, $K'(x) = e^{2x + e^x}$,

$K(x) = \int e^{2x + e^x} dx$. Pro výpočet tohoto integrálu provedeme substituci $e^x = t$, potom $K(x) = \int e^x \cdot e^{e^x} \cdot e^x dx =$
$= \int t e^t dt = te^t - e^t = (t-1)e^t = (e^x-1)e^{e^x}$. Partikulární řešení:
$y = K(x) e^{-e^x} = e^x - 1$. Obecné řešení: $y = Ke^{-e^x} + e^x + 1$.

B) Podobným způsobem se řeší i lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty, což je rovnice tvaru $ay'' + by' + cy = f(x)$, kde a, b, c jsou konstanty a $f(x)$ daná funkce (např. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$, $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$ atd.) . Její obecné řešení je opět součtem obecného řešení homogenní rovnice $ay'' + by' + cy = 0$ a jednoho partikulárního řešení původní rovnice. Obecné řešení původní rovnice $ay'' + by' + cy = 0$ obsahuje dvě na sobě nezávislé konstanty a je určeno řešením tzv. charakteristické rovnice, což je kvadratická rovnice $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$:

1) má-li charakteristická rovnice dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2, pak obecné řešení homogenní rovnice má tvar $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty,

2) má-li charakteristická rovnice dvojnásobný kořen λ_1, má homogenní rovnice obecné řešení $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$,

3) má-li charakteristická rovnice dva komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, pak obecné řešení homogenní rovnice je $C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$.

Partikulární řešení původní rovnice hledáme analogicky jako v případě A) ve tvaru obecného řešení homogenní rovnice, přičemž konstanty C_1 , C_2 považujeme za funkce. Hledané partikulární řešení s dosud neurčenými funkcemi C_1, C_2 nejprve zderivujeme a součet členů v této derivaci, obsahujících C_1', C_2', položíme roven nule. Tím dostáváme rovnici, obsahující C_1', C_2'. Druhou takovou rovnici dostaneme, dosadíme-li partikulární řešení do původní rovnice. Z takto vzniklé soustavy dvou rovnic o dvou neznámých C_1', C_2' vypočteme C_1', C_2', integrací C_1, C_2 a dosazením získáme partikulární řešení.

Příklad 4. $y'' - y' = e^x$. Nejprve nalezneme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - y' = 0$. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 - \lambda = 0$ má dva reálné různé kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, tedy podle bodu 1) má obecné řešení homogenní rovnice tvar $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{1 \cdot x} = C_1 + C_2 e^x$. Partikulární řešení hledáme v tomto tvaru, přičemž C_1, C_2 považujeme za funkce. Potom $y' = C_1' + C_2' e^x + C_2 e^x$. Součet členů, obsahujících C_1', C_2' položíme roven nule: $C_1' + C_2' e^x = 0$. Potom $y' = C_2 e^x$, $y'' = C_2' e^x + C_2 e^x$, dosazením do původní rovnice $y'' - y' = C_2' e^x + C_2 e^x - C_2 e^x = e^x$, tedy $C_2' e^x = e^x$, $C_2' = 1$. Pro určení C_1', C_2' máme tedy tuto soustavu:

$$\begin{aligned} C_1' + C_2' e^x &= 0 \\ C_2' &= 1 \end{aligned}$$

odtud $C_2 = x$, $C_1' = -C_2' e^x = -e^x$, $C_1 = -e^x$. Partikulární řešení je tedy $y = C_1 + C_2 e^x = -e^x + xe^x = (x-1)e^x$. Obecné řešení naší rovniceje součtem obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení: $y = C_1 + C_2 e^x + (x-1)e^x$.

Příklad 5. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$. Homogenní rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$ má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, která má dvojnásobný kořen $\lambda = 2$. Podle bodu 2) má obecné řešení homogenní rovnice tvar $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$. Partikulární řešení hledáme opět v tomto tvaru a C_1, C_2 považujeme za funkce. V derivaci $y' = C_1' e^{2x} + 2C_1 e^{2x} + C_1' x e^{2x} + C_2 (e^{2x} + 2x e^{2x})$ položíme roven nule součet členů, obsahujících C_1', C_2': $C_1' e^{2x} + C_2' x e^{2x} = 0$. Potom $y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 (e^{2x} + 2x e^{2x})$, $y'' = 2C_1' e^{2x} + 4C_1 e^{2x} +$

$+ C_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) + C_2(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x})$, dosazením do původní rovnice $y'' - 4y' + 4y = 2C_1'e^{2x} + 4C_1e^{2x} + C_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) + C_2(2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}) - 8C_1e^{2x} - 4C_2(e^{2x} + 2xe^{2x}) + 4(C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}) = 2C_1'e^{2x} + C_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 3e^{2x}$.

Tím jsme dostali soustavu dvou rovnic o neznámých C_1', C_2' :

$$C_1'e^{2x} + C_2'xe^{2x} = 0$$
$$2C_1'e^{2x} + C_2'(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 3e^{2x}$$

V obou rovnicích můžeme vydělit výrazem e^{2x}, tím dostáváme

$$C_1' + C_2'x = 0$$
$$2C_1' + C_2'(1 + 2x) = 3$$

Odečteme-li dvojnásobek první rovnice od druhé rovnice, je $C_2' = 3$, tedy $C_2 = 3x$, $C_1' = -C_2'x = -3x$, $C_1 = -\frac{3}{2}x^2$. Partikulární řešení je tedy $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} = -\frac{3}{2}x^2e^{2x} + 3x^2e^{2x} = \frac{3}{2}x^2e^{2x}$, obecné řešení původní rovnice

$y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$.

<u>Příklad 6.</u> $y'' - 2y' + 2y = e^x\sin x$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ má dva komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Podle bodu 3) má homogenní rovnice obecné řešení $y = C_1e^x\cos x + C_2e^x\sin x$, potom $y' = C_1'e^x\cos x + C_1(e^x\cos x - e^x\sin x) + C_2'e^x\sin x + C_2(e^x\sin x + e^x\cos x)$. Položíme $C_1'e^x\cos x + C_2'e^x\sin x = 0$, dosazením do původní rovnice dostáváme $C_1'(e^x\cos x - e^x\sin x) + C_2'(e^x\sin x + e^x\cos x) = e^x\sin x$. Soustavu

$$C_1'e^x\cos x + C_2'e^x\sin x = 0$$
$$C_1'(e^x\cos x - e^x\sin x) + C_2'(e^x\sin x + e^x\cos x) = e^x\sin x$$

upravíme nejprve vydělením e^x,

$$C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0$$
$$C_1'(\cos x - \sin x) + C_1'(\sin x + \cos x) = \sin x,$$

potom odečtením první rovnice od druhé dostáváme soustavu

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0$$
$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \sin x$$

jejíž řešení je $C_1' = -\sin^2 x$, $C_2' = \sin x \cos x$, tedy

$C_1 = -\int \sin^2 x\,dx = -\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}$,

$C_2 = \int \frac{\sin 2x}{2}\,dx = -\frac{\cos 2x}{4}$. Partikulární řešení

$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x = \frac{1}{4}((\sin 2x - 2x)\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x \sin x)e^x =$

$= \frac{1}{4}e^x((\sin 2x - 2x)\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x \sin x)$. Obecné řešení:

$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4}(\sin 2x - 2x)\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x \sin x)$.

V některých případech, kdy pravá strana lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty má speciální tvar, lze partikulární řešení určit jednodušeji, bez použití metody variace konstant.

B.1) Má-li pravá strana tvar $e^{\alpha x}p(x)$, kde α je jisté číslo a $p(x)$ mnohočlen, pak existuje partikulární řešení tvaru $x^k e^{\alpha x} q(x)$, kde $q(x)$ je jistý mnohočlen stejného stupně jako $p(x)$, a: $k = 0$, není-li α kořenem charakteristické rovnice, $k = 1$, je-li α jednoduchým kořenem charakteristické rovnice, $k = 2$, je-li α dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice. Tento obecný tvar partikulárního řešení dosadíme do původní rovnice, vykrátíme $e^{\alpha x}$ a porovnáme mocniny u stejných mocnin x . (metoda neurčitých koeficientů).

Příklad 7. $y'' - 3y + 2y = 2x^2 - 8x + 9$. Pravá strana má tvar $e^{0.x}(2x^2 - 8x - 9)$, přičemž 0 není kořenem charakteristické rovnice, tedy $k = 0$ a existuje partikulární řešení tvaru

$y = x^0 e^{0x}(ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + c$. Potom $y' = 2ax + b$,

$y'' = 2a$, dosazením $y'' - 3y' - 2y = 2ax - 6ax - 3b + 2ax^2 + 2bx + 2c =$

$= 2ax^2 + (2b - 6a)x + (2a - 3b + 2c) = 2x^2 - 8x + 9$;

protože tato rovnost musí platit pro všechna x, musí být

$2a = 2, 2b - 6a = -8, 2a - 3b + 2c = 9$, odtud $a = 1$, $b = -1$, $c = 2$, tedy partikulární řešení je $y = x^2 - x + 2$, obecné řešení původní rovnice je $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^2 - x + 2$.

Příklad 8. Vypočteme uvedeným způsobem znovu partikulární řešení z Příkladu 5: $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$. Zde je $\alpha = 2$, $p(x) = 3$, přičemž α je dvojnásobný kořen charakteristické rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, tedy obecný tvar partikulárního řešení je $y = x^2 e^{2x} \cdot C$, kde C je jistá konstanta (obecný tvar mnohočlenu nultého stupně). Potom $y' = C(2xe^{2x} + 2x^2e^{2x})$, $y'' = C(2e^{2x} + 4xe^{2x} + 4xe^{2x} + 4x^2e^{2x})$, dosazením $y'' - 4y' + 4y = 2Ce^{2x} = 3e^{2x}$, odtud $C = \frac{3}{2}$, partikulární řešení je tedy $y = \frac{3}{2} x^2 e^{2x}$.

B.2) Má-li pravá strana tvar $\alpha \sin \gamma x + \beta \cos \gamma x$, kde α, β, γ jsou jistá čísla, pak existuje partikulární řešení tvaru $x^k(A \sin \gamma x + B \cos \gamma x)$, kde $k = 0$, není-li číslo γi (kde i je imaginární jednotka) kořenem charakteristické rovnice a $k = 1$ je-li γi jednoduchým kořenem charakteristické rovnice. Tento obecný tvar partikulárního řešení dosadíme do původní rovnice a porovnáním koeficientů u $\sin \gamma x$, $\cos \gamma x$ vypočteme hodnoty A, B.

Příklad 9. $y'' - 5y' + 6y = 5 \sin x - 15 \cos x$. Protože číslo $1 \cdot i = i$ není kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$ a existuje tedy partikulární řešení tvaru $y = A \sin x + B \cos x$. Potom $y' = A \cos x - B \sin x$, $y'' = -A \sin x - B \cos y$, dosazením

$$y'' - 5y' + 6y = -A \sin x - B \cos x - 5A \cos x + 5B \sin x + 6A \sin x + 6B \cos x = (5A + 5B) \sin x + (5B - 5A) \cos x = 5 \sin x - 15 \cos x,$$

porovnáním koeficientů dostáváme $5A + 5B = 5$, $5B - 5A = 15$; tato soustava má řešení $A = 2$, $B = -1$, partikulární řešení tedy je $y = C_1 \sin x - \cos x$ a obecné řešení původní rovnice je $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 2 \sin x - \cos x$.

Příklad 10. $y'' + y = \sin x$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má řešení $\lambda_{1,2} = \pm i$, tedy $k = 1$ a existuje partikulární řešení tvaru $y = x(A\sin x + B\cos x)$ [v obecném tvaru partikulárního řešení musíme uvažovat i $\cos x$, neboť se na pravé straně vyskytuje s koeficientem 0]. Potom $y' = A(\sin x + x\cos x) + B(\cos x - x\sin x)$, $y'' = A(2\cos x - x\sin x) + B(-2\sin x - x\cos x)$, dosazením $y'' + y = 2A\cos x - 2B\sin x = \sin x$, porovnáním koeficientů dostáváme $2A = 0$, $-2B = 1$, tedy $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. Partikulární řešení je tedy $y = -\frac{1}{2}x\cos x$, obecné řešení celé rovnice

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

C v i č e n í

Lineární rovnice 1. řádu.

Nalezněte obecná řešení daných rovnic.

469. $y' + 2y = 4x$ **470.** $y' + y = \cos x$

471. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ **472.** $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

473. $y' + ay = e^{mx}$ (m přirozené, $a \neq 0$)

474. $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x$ **475.** $y' - \frac{y}{x} = x$

476. $y' - y = \frac{1+x^2}{x}e^x$ **477.** $y' + e^x y = e^{2x}$

478. $y' - \frac{n}{x+1}y = e^x(x+1)^n$ (n přirozené)

Nalezněte řešení následujících rovnic, která vyhovují daným počátečním podmínkám.

479. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$

480. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$; $y(0) = 0$

481. $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$; $y(a) = b$

482. $x' - \frac{x}{t} = -\frac{t}{1+t^2}$; $x(1) = -\frac{\pi}{4}$

483. $y' - \frac{y}{x(x+1)} = 1$; $y(1) = 0$

484. $y' - 3x^2y = x^5 + x^2$; $y(0) = 1$

Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.

Nalezněte obecná řešení následujících rovnic. Partikulární řešení u rovnic s pravou stranou najděte buď metodou variace konstant nebo odhadem (má-li pravá strana speciální tvar).

485. $y'' - 5y' + 6y = 0$

486. $y'' - 4y' + 2y = 0$

487. $y'' - 9y = 0$

488. $y'' + 4y' + 13y = 0$

489. $y = y'' + y'$

490. $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$

491. $y'' - 4y' + 4y = x^2$

492. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$

493. $y'' + y = \cos x$

494. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

495. $y'' + y' + 2y = 8 \sin 2x$

496. $y'' - 4y = e^{2x} \sin 2x$

497. $y'' + y = \operatorname{tg} x$

498. $y'' + 9y = 2x \sin x + x e^{3x}$

499. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$

500. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

501. $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$

502. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A \sin pt \qquad (\omega > 0,\ p > 0,\ A > 0)$

Řešte zvlášť pro $p \neq \omega$ a $p = \omega$.

503. $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

504. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$

V příkladech 505 - 509 nalezněte řešení, vyhovující daným počátečním podmínkám.

505. $y'' + 4y = \sin x \ ; \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 1$

506. $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1 \ ; \quad y(0) = \frac{1}{8} , \quad y'(0) = 1$

507. $y'' - y' = 2(1 - x) \ ; \quad y(0) = 1 , \quad y'(0) = 1$

508. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-\frac{3}{2}x} ; \quad y(0) = 3 , \quad y'(0) = -\frac{11}{2}$

509. $y'' + y + \sin 2x = 0 \ ; \quad y(\pi) = 1 , \quad y'(\pi) = 1$

II

NÁVODY

151. Volíme $u = x$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, vzniklý integrál $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ řešíme buď substitucí $x = \sin t$, nebo upravíme na tvar $\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, rozdělíme na dva integrály a ze vzniklé rovnice vypočteme daný integrál.

161. Substituce $x = a\sin t$ nebo $x = \frac{t}{a}$. Druhou substitucí převedeme daný integrál na integrál č. 151.

162. Substituce $x = \frac{1}{z}$, nebo $x = a\,\mathrm{tg}\,z$, nebo $x = a\sinh x$.

167. Substituce $e^x + 1 = z^4$.

168. Substituce $x = a\sinh z$, nebo $\sqrt{x^2+a^2} = x \pm t$.

181. Substituce $x - a = (b-a)\sin^2 t$.

230. Substituce $t = \frac{x+1}{x}$.

265. Rozšiřte integrovanou funkci výrazem $\sqrt[4]{x-1}$ a jmenovatele částečně odmocněte.

283. Je možno použít i substituci $x = \frac{1}{z}$.

288. Substituce $\sqrt{x^2+1} = t - x$ nebo $x = \sinh t$, nebo $x = \mathrm{tg}\,t$.

211. Rozšiřte celý výraz x^2 a použijte substituci $x + \frac{1}{x} = t$.
Výraz pod odmocninou upravte: $\frac{1+x^4}{x^2} =$
$= \left(\frac{x^2+1+\sqrt{2}x}{x}\right)\left(\frac{x^2+1-\sqrt{2}x}{x}\right) = (t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2}) = t^2\left(1-\frac{2}{t^2}\right)$
Pak použijte substituci $z = \frac{1}{t}$.

Určitý integrál

362. Všimněte si, že integrovaná funkce není definována pro $x = 0$, tj. pro dolní mez. Při použití Newtonova vzorce nemůžeme dosadit přímo dolní mez, ale místo toho musíme spočíst limitu primitivní funkce pro $x \to 0+$, jako u nevlastních integrálů (zde ovšem o nevlastní integrál nejde, integrovaná funkce je všude konečná a v bodě 0 ji lze dodefinovat limitou).

N e v l a s t n í   i n t e g r á l y

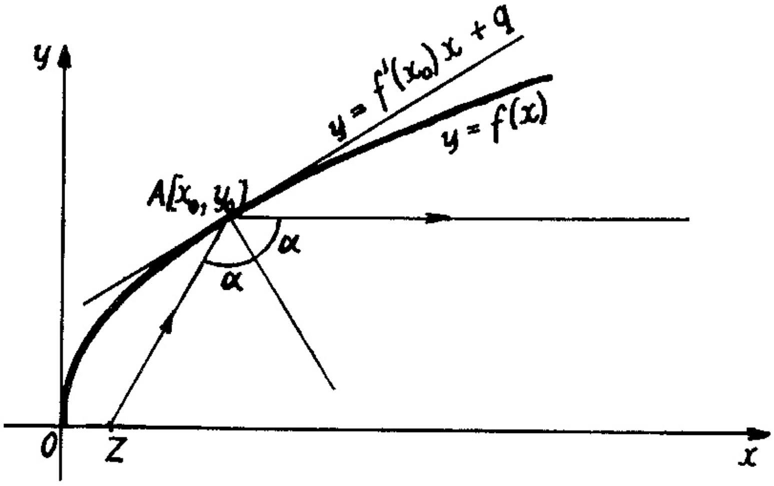
420. Použijte substituci $x = \cos\varphi$ a integrujte per partes.

431. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Poissonův integrál)

432. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (Dirichletův integrál)

433. Integrujte per partes a použijte předešlého návodu.

462. Zrcadlo je zřejmě rotační plocha; potom můžeme problém řešit jen jako rovinný problém:



III

VÝSLEDKY

1. Derivace

1. $\dfrac{8(4+x^2)}{(4-x^2)^2}$; $|x| \neq 2$

2. $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$

3. $1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $x>0$

4. $\dfrac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$; $|x| \neq 1$

5. $\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$; $x \neq 1$

6. $\dfrac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$

7. $\dfrac{1-4x}{x^2(2x-4)^2}$; $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$

8. $-\dfrac{\pi}{x^2}$; $x \neq 0$

9. $\dfrac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$; $-1<x<1$ pro $(n+m)$ sudé

   $|x| \neq 1$ pro $(n+m)$ liché

10. $\dfrac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$

11. $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; $|x| \neq 1$

12. $-\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

13. $-2\cos x\,(1+2\sin x)$

14. $x^2\sin x$

15. $n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$

16. $\cos(\sin(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x$

17. $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$; platí všude, kde $\operatorname{cotg} x \neq -x$

18. $-\dfrac{8}{3\sin^4 x\,\sqrt[3]{\operatorname{cotg} x}}$; $x \neq k\pi$

19. $-3\cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))\cdot\sin(2\operatorname{tg}^3 x)\cdot\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$; $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$

20. $-2x\,e^{-x^2}$

21. $x^6e^x(x+7)$

22. $e^x\,\dfrac{x-2}{x^3}$; $x \neq 0$

23. $e^x(\cos x-\sin x)$

24. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{\log x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}$; $x>0$

25. $\dfrac{2\log x}{x\log 10}-\dfrac{1}{x}$; $x>0$

26. 0

27. $\cot g\, x - \dfrac{x}{\sin^2 x} \quad ; \quad x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

28. $x \operatorname{arctg} x$

29. $\cos(e^{x^2+3x-2}) \cdot e^{x^2+3x-2}(2x+3)$

30. $A\, e^{-k^2 x}\,(\omega \cos(\omega x + \alpha) - k^2 \sin(\omega x + \alpha))$

31. $\dfrac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}} \quad ; \quad x > -1$

32. $\dfrac{e^{\sqrt{\log x}}}{2x\sqrt{\log x}} \quad ; \quad x > 1$

33. $3^{\sin x} \cos x \cdot \log 3$

34. $-\dfrac{2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \log 2}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}} \quad ; \quad x \neq 0 \qquad \dfrac{1}{x} \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$

35. $x^{x^2+1}(2\log x + 1) \quad ; \quad x > 0$

36. $x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right) \quad ; \quad x > 0$

37. $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x) \; ; \; x > 0$

38. $-\dfrac{\log a}{x \log^2 x} \quad ; \quad x > 0$

39. $e^{x^2}(x^2 \sin 2x \cdot (3 + 2x^2) + 2x^3 \cos 2x)$

40. $\left(2x - \dfrac{1}{1+x^2}\right) \dfrac{e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\log x + 1}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad x > 0$

41. $\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}$

42. $\dfrac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1 + \log(2x+3)}}}{(2x+3)(2 + \log(2x+3))\sqrt{1 + \log(2x+3)}} \quad ; \quad x > \dfrac{1}{2e} - \dfrac{3}{2}$

43. $\dfrac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} \quad ; \quad -1 - \sqrt{2} < x < -1 + \sqrt{2}$

$\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}}$

$-\dfrac{2n x^{n-1}}{x^{2n} + 1}$; n sudé ; $-\dfrac{2n x^{n}}{|x|(x^{2n} + 1)}$, n liché

$e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}(\sqrt[3]{4x^2} + 1)\left(\dfrac{\sqrt[3]{4x^2} + 1}{2(1+x)\sqrt{x}} + \dfrac{8}{3\sqrt[3]{2x}}\right) \quad ; \quad x > 0$

$\dfrac{(x^3-2)(x^3+6)\, e^{\cos^3 x}}{\sqrt[3]{(x^3+6)^4\, e^{2\cos^3 x}}}\,(6x^2(x^3+6) + 2x^2(x^3-2) - (x^3-2)(x^3+6)\cos^2 x \sin x)$;

$x \neq -\sqrt[3]{6}$

48. $x^{\frac{x}{\log^2 x}}\left(\frac{\log x - 1}{\log^2 x}\right)$; $x > 0$

49. $\frac{2\sqrt[x]{2x\sin x + 1}}{x}\left(\frac{2(\sin x + x\cos x)}{2x\sin x + 1} - \frac{\log(2x\sin x + 1)}{x}\right)$;

$x\sin x > -\frac{1}{2}$ $\qquad x \neq 0$

50. $\frac{3x^6 - 7x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 9x + 2}{(x^2-1)(x-2)(1+x^2)}$; $|x| < 1$ nebo $x > 2$

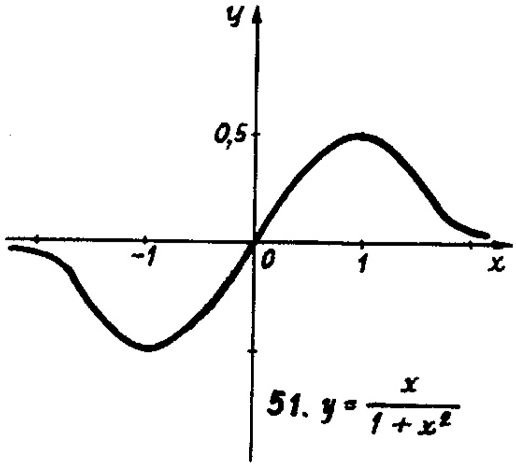
51. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce je lichá.

Maximum $y = \frac{1}{2}$ v $x = 1$.

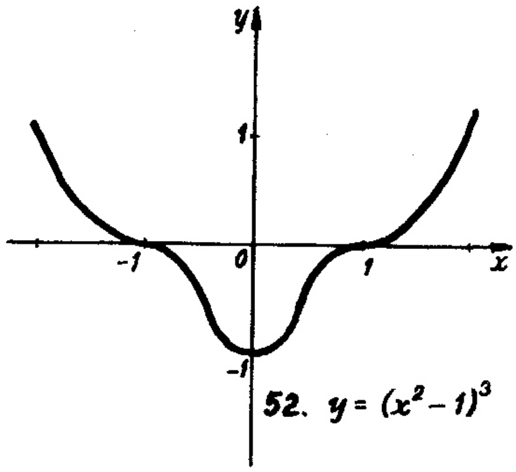
Minimum $y = -\frac{1}{2}$ v $x = -1$.

Inflexní body $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0,0)$, $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Asymptota $y = 0$.



51. $y = \frac{x}{1+x^2}$



52. $y = (x^2-1)^3$

52. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce sudá.

Minimum $y = -1$ pro $x = 0$.

Inflexní body $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{64}{125})$, $(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{64}{125})$.

Asymptoty nemá.

53. $x \neq 0$.

Minimum $y = 3$ pro $x = \frac{1}{2}$.

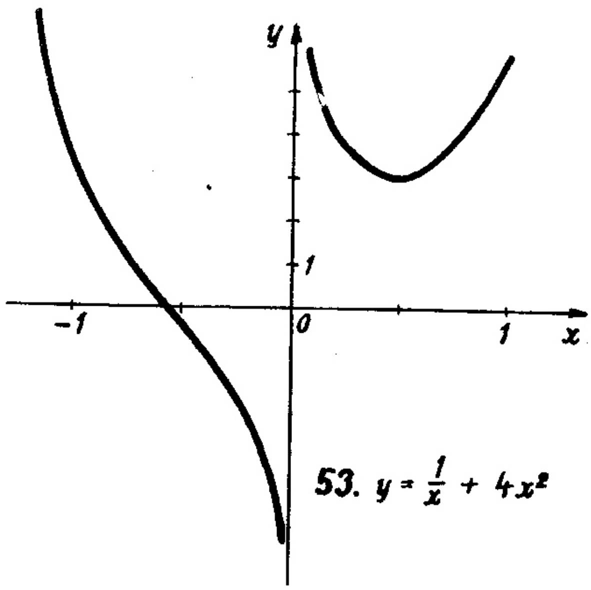
Inflexní bod $(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, 0)$.

Asymptota $x = 0$.

54. $x \neq 0$, funkce sudá.

Minima $y = 2$ pro $x = \pm 1$.

Asymptota $x = 0$.



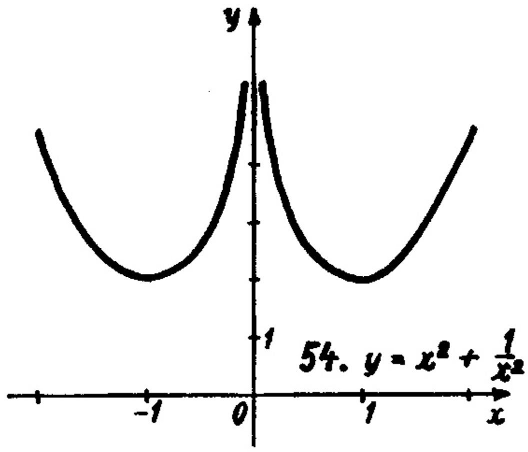
53. $y = \frac{1}{x} + 4x^2$

55. $x \neq 1$.

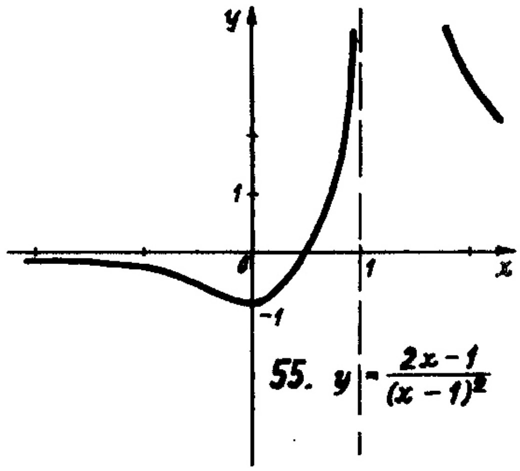
Minimum $y = -1$ pro $x = 0$.

Inflexní bod $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$.

Asymptoty $x = 1$ a $y = 0$.



54. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$



55. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

56. $x \neq 0$.

Minimum $y = e$ pro $x = 1$.

Asymptoty $x = 0$, $y = 0$.

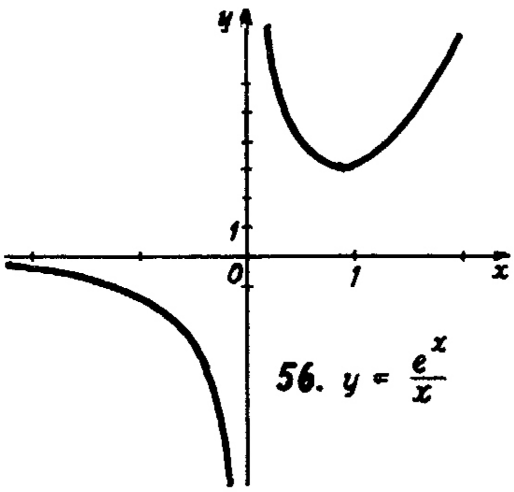
57. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce sudá.

Minimum $y = 0$ pro $x = 0$.

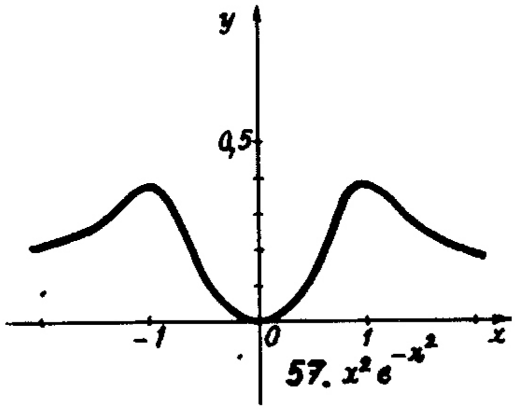
Maxima $y = \frac{1}{e}$ pro $x = \pm 1$.

Čtyři inflexní body v $x = \pm \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$.

Asymptota $y = 0$.



56. $y = \frac{e^x}{x}$



57. $x^2 e^{-x^2}$

58. $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$.

Maximum $y \doteq -2{,}60$ pro $x \doteq 2{,}58$.

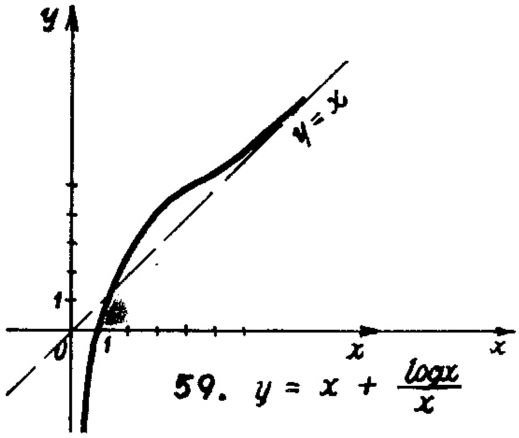
Minimum $y \doteq 2{,}60$ pro $x \doteq 1{,}42$.

Asymptoty $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

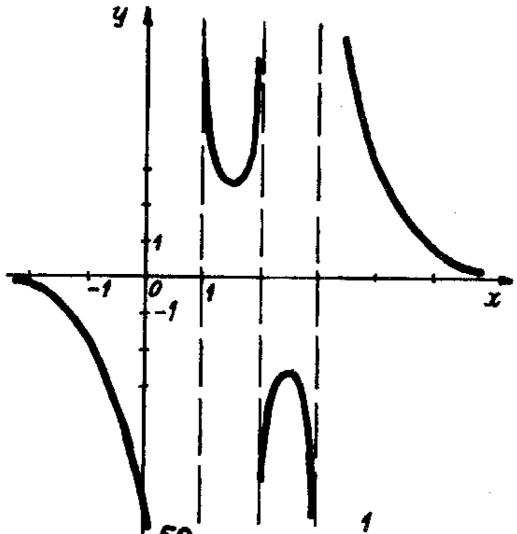
59. $x > 0$.

Inflexní bod $\left(e^{\frac{3}{2}},\ e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Asymptoty $x = 0$, $y = x$.



59. $y = x + \dfrac{\log x}{x}$



58. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

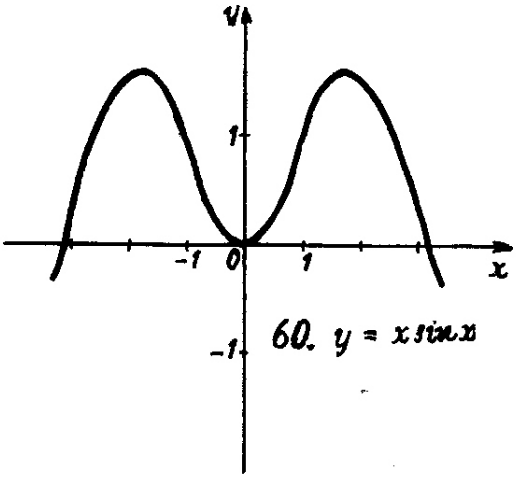
60. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce sudá.

Extrémy jsou v bodech, jejichž x-ové souřadnice vyhovují rovnici $\operatorname{tg} x = -x$.

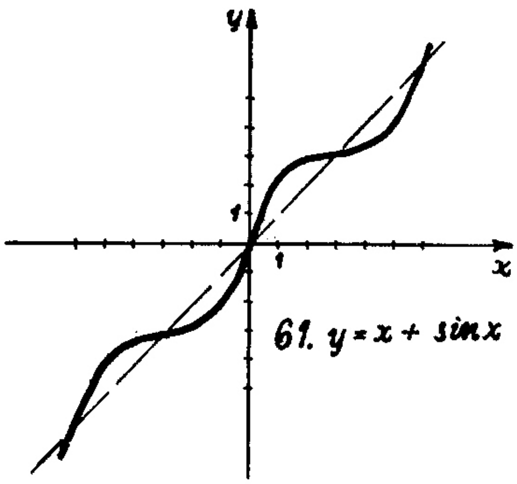
Pro x-ové souřadnice inflexních bodů platí $x \operatorname{tg} x = 2$.

61. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce lichá.

$y'' = 0$ pro $x = k\pi$, kde jsou inflexní body; v nich funkce protíná přímku $y = x$.



60. $y = x \sin x$



61. $y = x + \sin x$

62. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce sudá.

Minimum $y = 0$ pro $x = 0$.

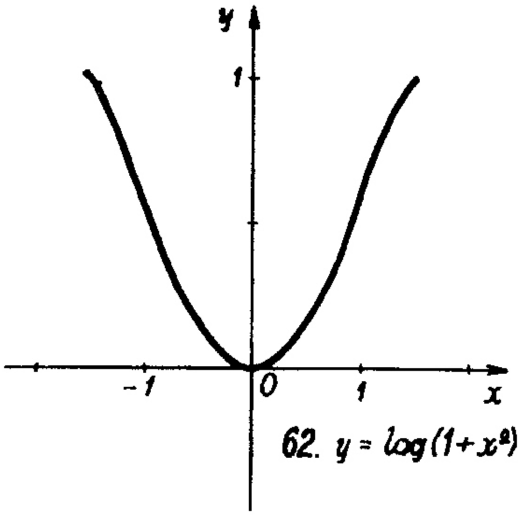
Inflexní body $(\pm 1, \log 2)$.

63. $x \in (-\infty, +\infty)$, graf je souměrný podle bodu $(1, 2)$.

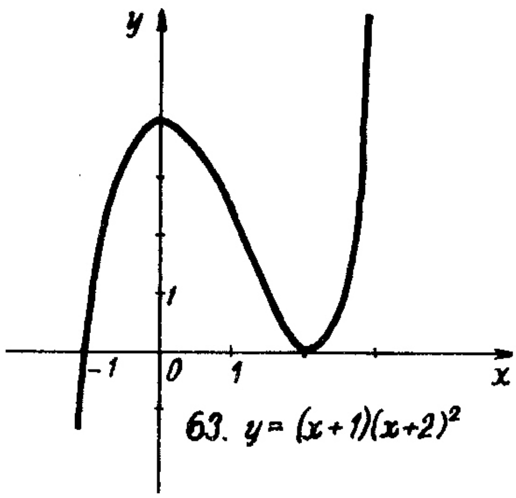
Minimum $y = 0$ pro $x = 2$.

Maximum $y = 4$ pro $x = 0$.

Inflexní bod $(1, 2)$.



62. $y = \log(1+x^2)$



63. $y = (x+1)(x+2)^2$

64. $x \neq 2$, $x \neq 3$.

Minimum $y = -(10 - \sqrt{96}) \doteq -0{,}20$ pro $x = \frac{7 - \sqrt{24}}{5} \doteq 0{,}42$.

Maximum $y = (-10 + \sqrt{96}) \doteq -19{,}80$ pro $x = \frac{7 + \sqrt{24}}{5} \doteq 2{,}38$.

Inflexní bod $x \doteq -0{,}58$, $y \doteq -0{,}07$.

Asymptoty $x = 2$, $x = 3$, $y = 1$.

65. $x \neq 1$.

Minimum $y = \frac{27}{2}$ pro $x = 5$.

Inflexní bod $x = -1$, $y = 0$.

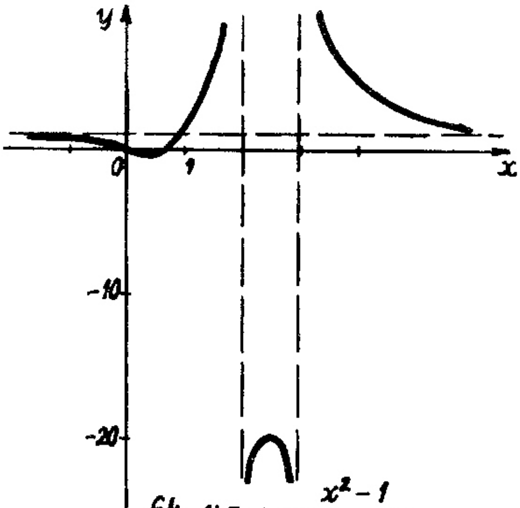
Asymptoty $x = 1$, $y = x + 5$.

66. $0 \leq x < +\infty$.

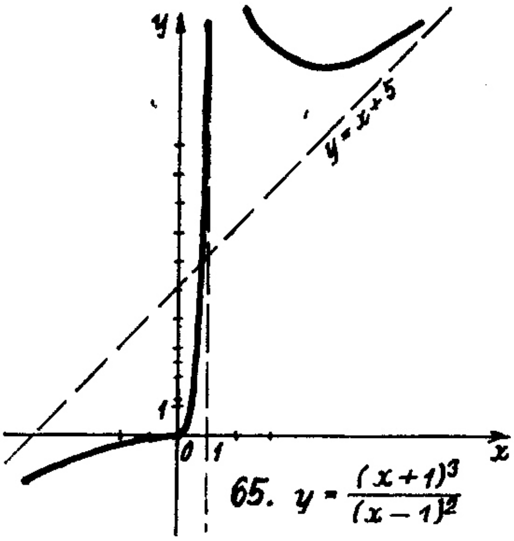
Minimum $y = -2$ pro $x = 1$.

Maximum $y = 0$ pro $x = 0$.

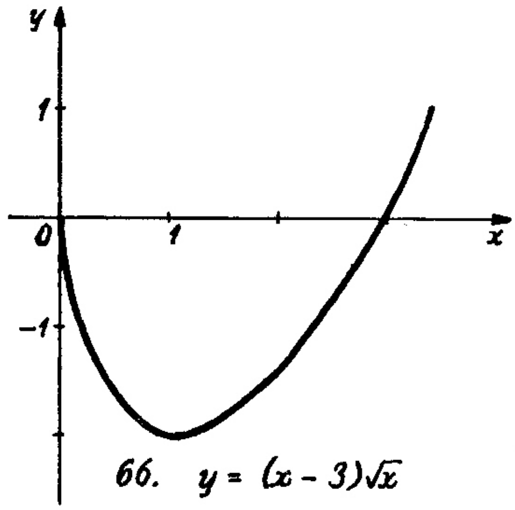
Funkce je konvexní.



64. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$



65. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

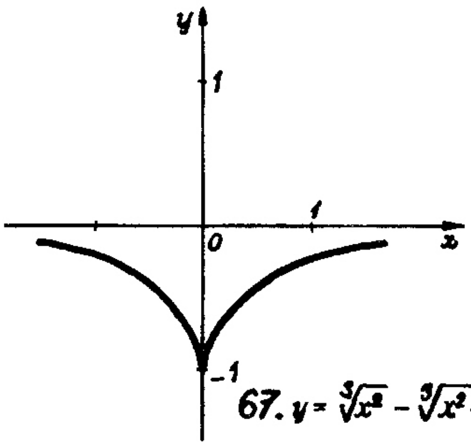


66. $y = (x-3)\sqrt{x}$

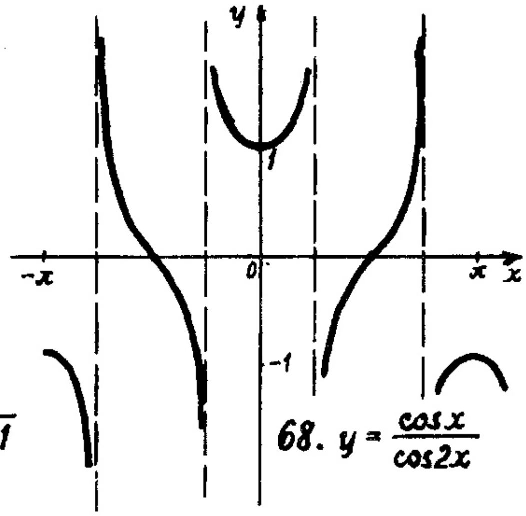
67. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce je sudá.

Minimum $y = -1$ pro $x = 0$.

Asymptota $y = 0$.



67. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$



68. $y = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$

68. $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$, funkce sudá a periodická s periodou 2π.

Na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$:

Minimum $y = 1$ pro $x = 0$.

Maximum $y = -1$ pro $x = \pm\pi$.

Inflexní bod $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Asymptoty $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{3\pi}{4}$.

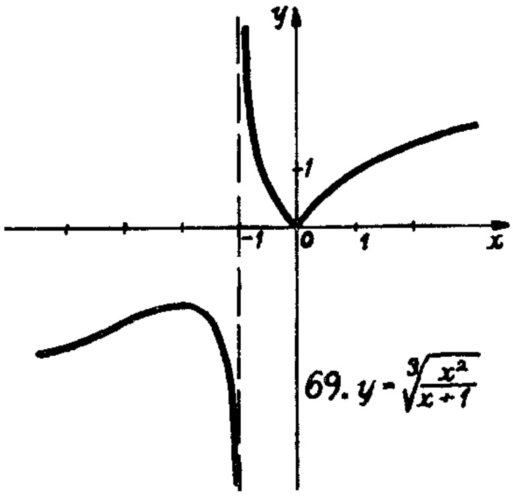
69. $x \neq -1$.

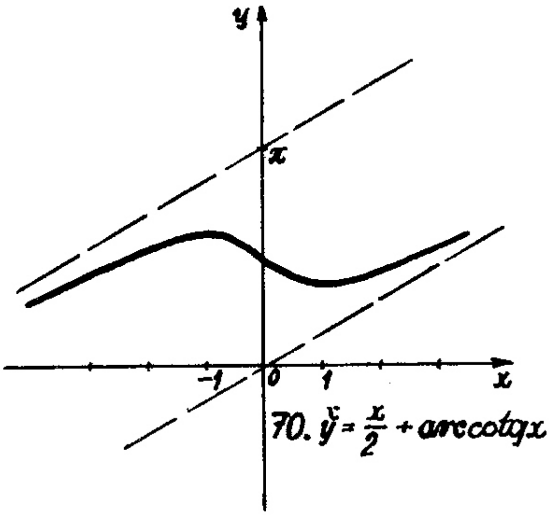
Minimum $y = 0$ pro $x = 0$.

Maximum $y = -\sqrt[3]{4} \doteq 1,59$ pro $x = -2$.

Inflexní body $x_1 = -(2-\sqrt{3}) \doteq -0,27,\ y_1 = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{27}-5}{2}} \doteq 0,46,$
$x_2 = -(2+\sqrt{3}) \doteq -3,73,\ y_2 = -\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{27}+5}{2}} \doteq -1,72.$

Asymptota $x = -1$.





70. $x \in (-\infty, +\infty)$, graf symetrický podle bodu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Minimum $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ pro $x = 1$.

Maximum $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}$ pro $x = -1$.

Inflexní bod $(0, \frac{\pi}{2})$.

Asymptoty $y = \frac{x}{2}$ pro $x \to +\infty$ a $y = \frac{x}{2} + \pi$ pro $x \to -\infty$.

71. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce lichá.

Minimum $y = -\frac{\pi}{2}$ pro $x = 1$.

Maximum $y = \frac{\pi}{2}$ pro $x = -1$.

Inflexní bod $(0, 0)$.

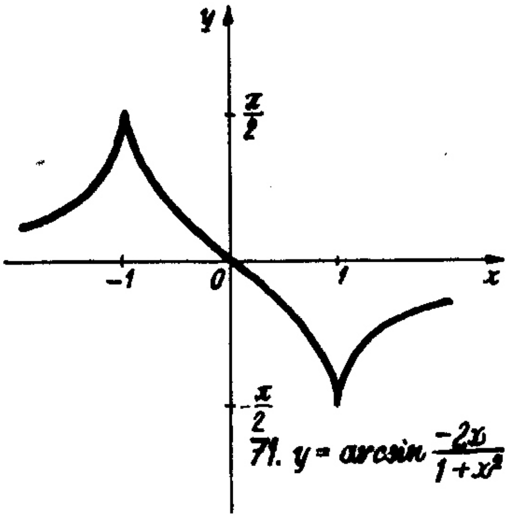
Asymptota $x = 0$.

72. $x > 0$.

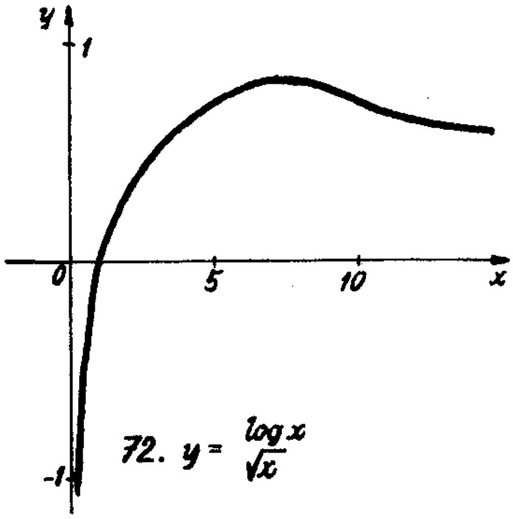
Maximum $y = \frac{2}{e}$ pro $x = e^2$.

Inflexní bod $x = e^{\frac{8}{3}} \doteq 14,33$, $y = \frac{8}{3} e^{-\frac{4}{3}} \doteq 0,70$.

Asymptoty $x = 0$ pro $x \to 0+$ a $y = 0$ pro $x \to -\infty$.



71. $y = \arcsin \frac{-2x}{1+x^2}$



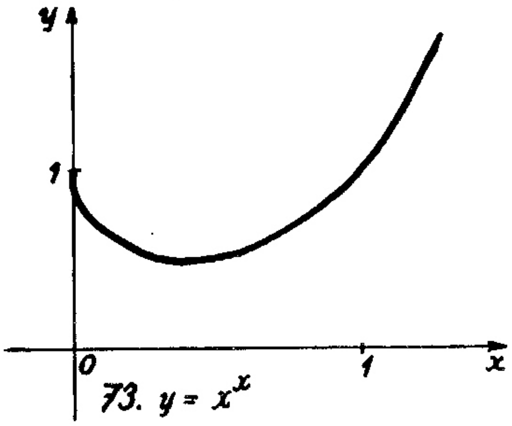
72. $y = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$

73. $x > 0$.

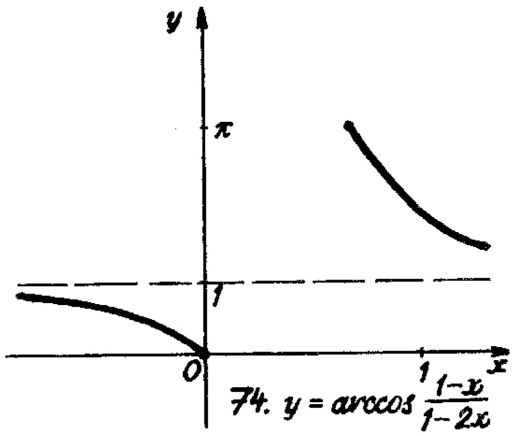
Minimum $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \doteq 0,692$ pro $x = \frac{1}{e} \doteq 0,368.$

$\lim\limits_{x \to 0+} x^x = 1.$

Funkce je konvexní.



73. $y = x^x$



74. $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$

74. $x \le 0$ a $x \ge \frac{2}{3}$.

$y(0) = 0, \quad y(\frac{2}{3}) = \pi.$

Asymptota $y = \frac{\pi}{3}$.

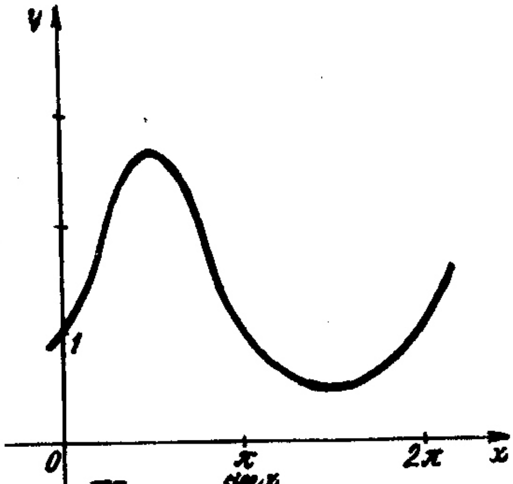
75. $x \in (-\infty, +\infty)$, funkce periodické s periodou 2π.

Na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$:

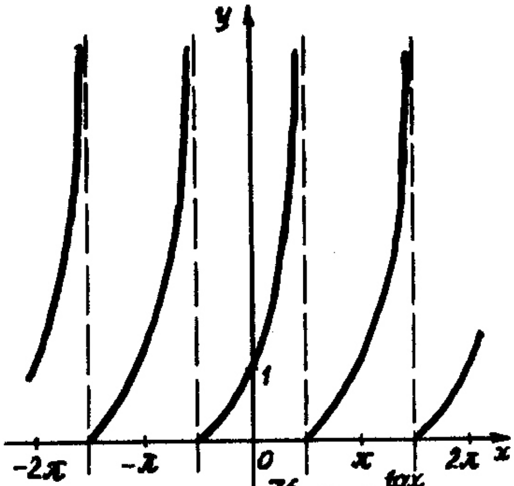
Minimum $y = \frac{1}{e}$ pro $x = \frac{3\pi}{2}$.

Maximum $y = e$ pro $x = \frac{\pi}{2}$.

Inflexní body pro $x_1 = \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $x_2 = \pi - x_1$.



75. $y = e^{\sin x}$



76. $y = e^{tg x}$

76. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, funkce periodická s periodou π.

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} e^{tg x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} e^{tg x} = +\infty$.

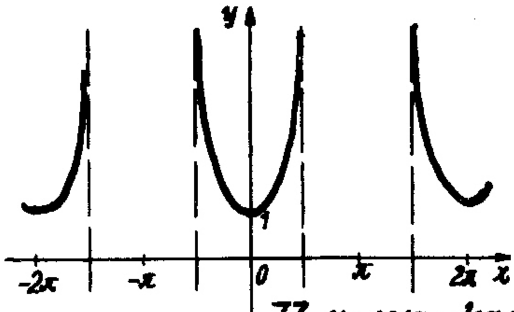
Asymptoty $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

77. Funkce je definována na intervalech tvaru $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$,

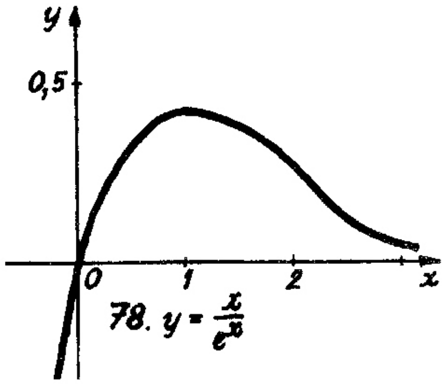
je sudá, periodická s periodou 2π.

Minimum $y = 1$ pro $x = 2k\pi$.

Asymptoty $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.



77. $y = \cos x - \log \cos x$



78. $y = \frac{x}{e^x}$

78. $x \in (-\infty, +\infty)$.

Maximum $y = \frac{1}{e}$ pro $x = 1$.

Inflexní bod $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

Asymptota $y = 0$.

79. $x \neq 0$, funkce je prostá.

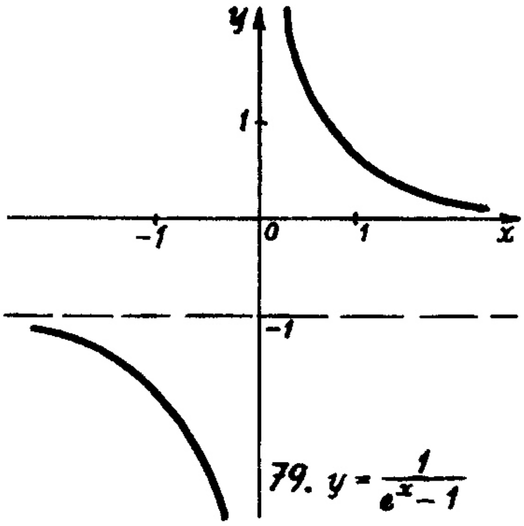
Asymptoty $x = 0$, $y = 0$, $y = -1$.

80. $x < -1$ a $x > 0$.

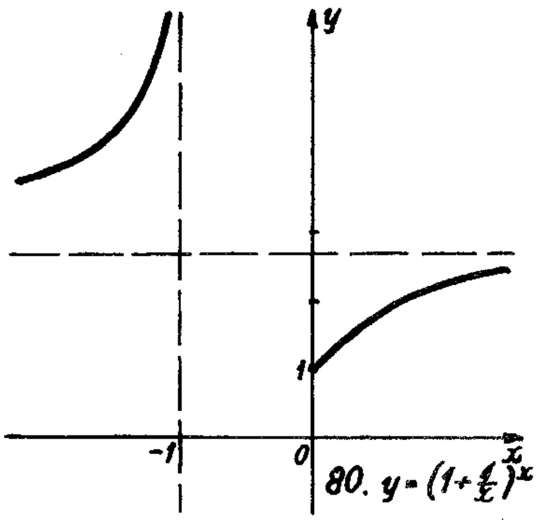
Funkce je rostoucí; na intervalu $(-\infty, -1)$ od e do $+\infty$, na intervalu $(0, +\infty)$ od 1 do e.

$\lim\limits_{x \to 0+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1.$

Asymptoty $x = -1$, $y = e$.



79. $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$



80. $y = (1 + \frac{1}{x})^x$

3. Neurčitý integrál

81. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C \; ; \; x \geq 0$

82. $C - \frac{1}{x} \; ; \; x \neq 0$

83. $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C \; ; \; h > 0$

84. $u - u^2 + C$

85. $z - 2\log|z| - \frac{1}{z} + C \; ; \; z \neq 0$

86. $\frac{10^x}{\log 10} + C$

87. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \; ; \; x > 0$

88. $x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C$

89. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x) + C \; ; \; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

90. $x - \sin x + C$

91. $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}} \; ; \; x > 0$

92. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C \; ; \; x \neq 0$

93. $3x - \frac{2(1{,}5)^x}{\log(1{,}5)} + C$

94. $C - \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x \; ; \; x \neq \frac{k\pi}{2}$

95. $\operatorname{tg} x - x + C \; ; \; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

96. $x + 2\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \; ; \; |x| \neq 1$

97. $(\cos x + \sin x)\cdot \operatorname{sign}(\cos x - \sin x) + C \; ; \; x \neq (4k+1)\frac{\pi}{4}$

98. $\frac{\pi}{2}x + C \; ; \; x \in \langle -1, 1\rangle$

99. $\operatorname{tg} x + C \; ; \; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

101. $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + C \; ; \; x \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

100. $\frac{2x^2 - 12x - 6}{3\sqrt{x}} + C \; ; \; x > 0$

102. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}\right| + C \; ; \; x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$

103. $-\frac{2}{15(5x-2)^{3/2}} + C \; ; \; x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

104. $\frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C$

105. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C$

106. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

107. $\frac{1}{6}\sin^6 x + C$

108. $-\log|\cos x| + C \; ; \; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

109. $-\log\left(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}\right) + C$

110. $\log(2 + e^x) + C$

111. $\frac{\sin^2 x}{2} + C$

112. $\sqrt{x^2+1} + C$

113. $3\sqrt[3]{\sin x} + C \; ; \; x \neq k\pi$

114. $\frac{1}{3}\sin 3x + C$

115. $C - \frac{1}{2(\arcsin x)^2}$; $x \in (-1, 1)$

116. $C - \frac{1}{2}\cos(2x-3)$

117. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x - \frac{\pi}{4}) + C$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$

118. $\frac{1}{3}\log|x^3+1| + C$; $x \neq -1$

119. $\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C$

120. $C - \cos e^x$

121. $x\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

122. $C - \log(1+\cos^2 x)$

123. $\frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right) + C$

124. $\frac{1}{4}\log^2\frac{1+x}{1-x} + C$; $x \in (-1, 1)$

125. $-\operatorname{arctg}(\cos 2x) + C$

126. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x} + C$; $x \neq \frac{k\pi}{2}$

127. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$

128. $\frac{2}{3}\log^{\frac{3}{2}}(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

129. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C$

130. $C - \frac{1}{3}e^{-x^3}$

131. $\frac{1}{5}\arcsin 5x + C$; $x \in (-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

132. $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{a} + C$

133. $\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

134. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

135. $\log|\operatorname{tgh}\frac{x}{2}| + C$; $x \neq 0$

136. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + C$

137. $C - e^{-x}(x+1)$

138. $C - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2} + \frac{x^3}{3}\arccos x$; $x \in (-1, 1)$

139. $C - \frac{x}{2} + \frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x + C$

140. $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$; $x \geq 0$

141. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C$; $x > 0$

142. $\frac{3^x}{\log^2 3}(x\log 3 - 1) + C$

143. $\log\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \cdot \log\operatorname{tg} x + C$; $x \in (2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2})$

144. $C - \frac{\arcsin x}{x} - \log\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$; $x \neq 0$ $\quad x \in (-1, 1)$

145. $x\sin x + \cos x + C$

146. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C$

147. $x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$

148. $x(\log^2 x - 2\log x + 2) + C\;;\;\; x > 0$

149. $x(\log x - 1) + C\;;\;\; x>0$

150. $\frac{x}{2}(\sin\log x - \cos\log x) + C\;;\;\; x > 0$

151. $C - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\;;\;\; x \in (-1, 1)$

152. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg}^2 x) - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

153. $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

154. $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

155. $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x - 5\cos 2x) + C$

156. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C\;;\;\; x \geq 0$

157. $x\log(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$

158. $C - \frac{1}{2x^2}\log(x\sqrt{e})\;;\;\; x > 0$

159. $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx + a\cos nx) + C$

160. $\frac{1}{2}\left((x^2-1)\sin x - (x-1)^2\cos x\right)e^x + C$

161. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C\;;\;\; x \in (-a, a)$

162. $C - \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2 x}$

163. $C - \frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}\,(2a^3+x^3)\;;\;\; x \in (-a, a)$

164. $\frac{x^2-4}{2} - \frac{8}{x^2-4} + 4\log|x^2-4| + C\;;\;\; |x| \neq 2$

165. $\log\left|\frac{\sqrt{1-e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C\;;\;\; x < 0$

166. $2\log|\sqrt{1+\log x} - 1| + 2\sqrt{1+\log x} - \log|\log x| + C\;;$
$x \neq 1,\;\; x > e^{-1},\; x \neq 0$

167. $\frac{4}{21}(3e^x - 4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C$

168. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{a^2+x^2})$

169. $C - \frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + 3a^2 \arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$; $x \in \langle 0, 2a)$

170. $C - \frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$ 171. $C - \frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}$

172. $C - x - 2e^{-\frac{x}{2}} + 2\log(1+e^{\frac{x}{2}})$

173. $C - \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x)$

174. $\log\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} + C$; $x \neq 0$

175. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$

176. $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x$; $x \in (-1, 1)$

177. $C - \frac{\sqrt{(9x-x^2)^5}}{45x^5}$; $x \in (-3, 3)$

178. $C - \frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}$; $|x| > a$

179. $C - \sqrt{a^2-x^2} + a\arcsin\frac{x}{a}$; $x \in (-a, a)$

180. $\sqrt{x^2-a^2} - 2a\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}) + C$, $x > |a|$;

$-\sqrt{x^2-a^2} + 2a\log(\sqrt{a-x}+\sqrt{-(x+a)}) + C$, $x < -|a|$

181. $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$; $x \in (a, b)$

182. $2\sqrt{\sin^3 x}\left(\frac{1}{3} - \frac{\sin^2 x}{7} - \frac{\sin^4 x}{11}\right) + C$; $\sin x \geq 0$

183. $\frac{2}{a}(\sqrt{ax+b} - m\log(\sqrt{ax+b}+m)) + C$; $x \geq -\frac{b}{a}$

184. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$; $x > 0$

185. $2(\sqrt{x} - \log(1+\sqrt{x})) + C$; $x \geq 0$

186. $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\log|1-x^2| + C$; $x \in (-1, 1)$

187. $3((2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}) + C$

188. $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$

189. $\log\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$; $x \neq 0$

190. $\frac{1}{9}(1+e^{3x})^3 + C$

191. $2x - tg\,x + C\,;\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

192. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \log|x+1| + C\,;\ x \neq -1$

193. $\frac{1}{6}\sqrt{2+4x}\,(x-1) + C\,;\ x > -\frac{1}{2}$

194. $\frac{2}{45}\sqrt{tg^5 x}\,(5\,tg^2 x + 9) + C\,;\ tg\,x \geq 0$

195. $C - 2\,cotg\,2\varphi\,;\ \varphi \neq k\frac{\pi}{2}$

196. $\frac{(arctg\,x)^{n+1}}{n+1} + C\,;\ n \neq -1$

$\log|arctg\,x| + C\,;\ n = -1,\ x \neq 0$

197. $\frac{1}{3}(tg\,3x + \log\cos^2 3x) + C\,;\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}$

198. $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$

199. $C - \frac{5}{24}(2 - 3x^{\frac{4}{3}})^{\frac{6}{5}}$

200. $\frac{2}{3}\log(1 + x^{\frac{3}{2}}) + C\,;\ x \geq 0$

201. $2e^{\sqrt{x}} + C\,;\ x > 0$

202. $e^{-\cos x} + C$

203. $C - \log(3 + e^{-x})$

204. $\frac{1}{5}tg^5 x + C\,;\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

205. $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \cos x + C\,;\ \sin x \geq 0$

206. $\frac{a^{mx}\,b^{nx}}{m\log a + n\log b} + C$

207. $\frac{2}{15}(3x - 2a)\sqrt{(a+x)^3} + C$

208. $C - \arcsin e^{-x}\,;\ x > 0$

209. $\arcsin\frac{\log x}{\sqrt{3}} + C\,;\ x \in (e^{-\sqrt{3}}, e^{\sqrt{3}})$

210. $\frac{1}{9}(2\sqrt{9x^2-4} - 3\log|3x + \sqrt{9x^2-4}|) + C\,;\ |x| > \frac{2}{3}$

211. $\frac{1}{2}\log|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6})| + C\,;\ x \neq (k + \frac{2}{3})2\pi$

212. $\sin x - arctg\sin x + C$

213. $\sqrt{2}\log|tg\frac{x}{4}| + C\,;\ x \neq 2(2k+1)\pi$

214. $C - \frac{1}{2}e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2)$

215. $e^{e^x} + C$

216. $C - \frac{1}{8}\log\frac{2+\cos 2x}{2-\cos 2x}$

217. $\frac{1}{4}(\log(1+x^4) + \frac{1}{1+x^4}) + C$

218. $\frac{e^x}{2}(1 - \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5}) + C$

219. $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + x + C$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

220. $x - \sqrt{1-x^2}\arcsin x + C$; $x \in (-1, 1)$

221. $2\log(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) + C$ **222.** $\frac{1}{4}e^{2x^2} + C$

223. $e^{2x}(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}) + C$

224. $\frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x\cos 2x + C$

225. $\frac{1}{\omega^3}((\omega^2x^2 - 2)\sin\omega x + 2\omega x\cos\omega x) + C$

226. $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2} + C$

227. $2\sqrt{e^x - 1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C$; $x > 0$

228. $x\arccos\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$; $x > 0$

229. $\arcsin e^x - \sqrt{1-e^{2x}} + C$; $x > 0$

230. $C - \frac{1}{2}\log^2(1 + \frac{1}{x})$; $x \neq 0$, $x > -1$

V příkladech 231 - 260 platí výsledky v definičním oboru integrované funkce.

231. $\log|x-2| + \log|x+5| + C$ **232.** $\log|x+1| - \frac{1}{2}\log|2x+1| + C$

233. $\log\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right| + C$

234. $\frac{1}{4}x + \log|x| - \frac{7}{16}\log|2x-1| - \frac{9}{16}\log|2x+1| + C$

235. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C$

236. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2-2}{x^2-1} + C$

237. $\frac{x^2}{2} + \log\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right| + C$

238. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \log\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^5}\right| + C$

239. $\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} +$
$+ 171\,x + \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right| + C.$

240. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right| + C$ 241. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

242. $\frac{4}{x+2} + \log|x+1| + C$

243. $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\log\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C$

244. $2\log\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{5x+12}{x^2+6x+8} + C$

245. $\frac{x}{8} - \log|x+1| - \frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3} + C$

246. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x}{x-2}\right| - \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2(x-2)} + C$

247. $C - \frac{x}{(x^2-1)^2}$ 248. $x + \frac{1}{x} + \log\frac{(x-1)^2}{|x|} + C$

249. $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4\log\left|\frac{x-1}{x-2}\right| + C$

250. $\log\left|\frac{x^2}{x-1}\right| + \frac{6}{x+1} + C$

251. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arccotg}\,x + \frac{1}{4}\log\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + C$

252. $\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

253. $\frac{1}{3}\log\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

254. $\frac{(x+1)^2}{2} + \log\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \mathrm{arctg}\,x + C$

255. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$

256. $\log\left|\frac{x}{1+x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+2x}{\sqrt{3}} + C$

257. $\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \log\sqrt{x^2+2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

258. $\frac{3}{8}\,\mathrm{arctg}\,(x+1) - \frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2} + C$

259. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1} + \frac{3}{2}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right) + C$

260. $\frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{1}{648}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + C$

261. $\log \frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}} + \frac{10}{\sqrt[10]{x}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}} + C\,;\quad x>0$

262. $6\sqrt[3]{(1+x^2)^2}\left(\frac{(1+x)^2}{16} - \frac{1+x}{5} + \frac{\sqrt{1+x}}{7} + \frac{1}{4}\right) + C;\ x>-1$

263. $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C\,;\quad |x|<1$

264. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{x} + C\,;\quad x\in(0,1)$

265. $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C\,;\quad x>-1$ nebo $x<-2$

266. $\frac{1}{15}\cos^3(3\cos^2 x - 5) + C$

267. $x - \frac{1}{7}\mathrm{cotg}^7 x + \frac{1}{5}\mathrm{cotg}^5 x - \frac{1}{3}\mathrm{cotg}^3 x + \mathrm{cotg}\,x + C$

268. $\frac{1}{\cos x - 1} + C$

269. $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{cotg}^2 x) + 2\log|\mathrm{tg}\,x| + C$

270. $C - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$

271. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1} + C\,,\quad z=\sqrt{\mathrm{tg}\,x}$

272. $C - \frac{3}{2}\cos x - \frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$

273. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left|\mathrm{tg}\frac{x+\mathrm{arctg}\frac{a}{b}}{2}\right| + C$

274. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right| + C$

275. $\log\frac{|C\cdot\sin x|}{\sqrt{\cos 2x}} + C$

276. $\frac{1}{2}(x + \log|\sin x + \cos x|) + C$

277. $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C$

278. $\frac{\cos x(\cos x - \sin x)}{4} - \frac{1}{4}\log|\cos x - \sin x| + C$

279. $C - \frac{1}{2}\left(\mathrm{cotg}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)\right)$

280. $\log\frac{|\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x-1}|}{\sqrt[6]{\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{2\,\mathrm{tg}\,x+1}{\sqrt{3}} + C$

281. $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}| + C;$

pro $x<1-\sqrt{2}$ nebo $x>1+\sqrt{2}$

282. $C - \frac{1}{\sqrt{3}} \log \left| \frac{3 + 3x + 2\sqrt{3(x^2 + x + 1)}}{x - 1} \right|$

283. $\log \frac{|cx|}{2 + x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}$

284. $\log|x + 1 + \sqrt{2x + x^2}| - \frac{4}{x + \sqrt{2x + x^2}} + C;\ x < -2$ nebo $x > 0$

285. $C - \frac{3}{2(2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1})} - \frac{3}{2} \log|2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}| +$
$+ 2 \log|x - \sqrt{x^2 - x + 1}|$

286. $\frac{1}{2}(3 - x)\sqrt{1 - 2x - x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C;\ x \in (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$

287. $\frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x} + C$ **288.** $\log|x + \sqrt{1 + x^2}| + C$

289. $C - \frac{1}{2}(3x - 19)\sqrt{3 - 2x - x^2} + 14 \arcsin \frac{x + 1}{2};\ x \in (-3, 1)$

290. $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + \log(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C;\ x \neq 1$

291. $\frac{1}{15}\left(\frac{1}{2} \log \frac{(z - 1)^2}{z^2 + z + 1} - \sqrt{3}\, \mathrm{arctg} \frac{2z + 1}{\sqrt{3}}\right) + C,\ z = x^5,\ x \neq 1$

292. $\frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathrm{arctg} \frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{2}} + C$

293. $2\sqrt{x + 1}\,(\log|x + 1| - 2) + C;\ x > -1$

294. $3e^{\sqrt[3]{x}}\,(\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x + 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120) + C$

295. $2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C;\ x > 0$

296. $(\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x)\sqrt{x^2 + 1} + \frac{3}{8}\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$

297. $C - \frac{1}{4} \log|\mathrm{tg} \frac{x}{2}| + \frac{1}{8 \sin^2 \frac{x}{2}};\ x \neq k\pi$

298. $\frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C$

299. $\frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + C$

300. $x\, \mathrm{arctg}(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} + \log|x + 2\sqrt{x} + 2| + C;\ x > 0$

301. $C - \frac{\sqrt{2x + 1}}{x} + \log\left|\frac{\sqrt{2x + 1} - 1}{\sqrt{2x + 1} + 1}\right|;\ x > -\frac{1}{2},\ x \neq 0$

302. $\frac{2}{b^2 \sin 2\alpha} \log\left|\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)}\right| + C,\ \alpha = \arccos \frac{a}{b}$ pro $a^2 < b^2$

$\frac{1}{a^2 \sin \alpha}\, \mathrm{arctg} \frac{\mathrm{tg}\, x}{\sin \alpha} + C,\ \alpha = \arccos \frac{b}{a}$ pro $a^2 > b^2$

303. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$; $x \neq 1$, $x \neq -1$

304. $\log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{\arcsin x}{x} + C$; $x \in (-1, 0)$ nebo $x \in (0, 1)$

305. $x^2 \cosh x - 2x \sinh x + 2\cosh x + C$

306. $\frac{x}{\log x} + C$; $x \in (0, 1)$ nebo $x \in (1, +\infty)$

307. $\frac{1}{2} e^x ((x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x) + C$

308. $\log \frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}} - e^x + 1} + C$

309. $\frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343}\log\left|\frac{x-5}{x+2}\right| + C$; platí pro $x < -2$ nebo $x \in (-2, 5)$ nebo $x > 5$

310. $e^{\sin x}\left(x - \frac{1}{\cos x}\right) + C$; $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$

311. $\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C$

312. $C - \frac{\operatorname{arctg} x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{4} + \frac{x}{4(1+x^2)}$

313. $2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2\log\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$

314. $C - \frac{6x+x^3}{9} + \frac{2+x^2}{2}\sqrt{1-x^2}\arccos x$;+ $|x| < 1$

315. $e^x + C$ pro $x < 0$; $C - e^{-x}$ pro $x > 0$

316. $x + C$ pro $|x| \leq 1$; $\frac{x^3}{3} + C$ pro $|x| > 1$

317. $\log\left|\operatorname{tg} x + 2 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 1}\right| + C$; $\cos x \neq 0$

318. $\mathcal{I}_n = \frac{A \sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B\,\mathcal{I}_{n-1} + C\,\mathcal{I}_{n-2}$; $\cos x \neq -\frac{a}{b}$

$$A = \frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}, \quad B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}, \quad C = \frac{2-n}{(n-1)(a^2-b^2)}$$

319. $\mathcal{I}_n = 2\,\mathcal{I}_{n-1}\cos a - \mathcal{I}_{n-2} + \frac{2\sin a}{n-1}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^{n-1}$; $n > 2$, $x \neq 2k\pi - a$

320. $\mathcal{I}_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\mathcal{I}_{n-2}$

6. Určitý integrál

321. $\dfrac{\pi}{2\sin\alpha}$

322. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

323. 2

324. $\dfrac{\pi}{3}$

325. $\dfrac{45}{4}$

326. $\dfrac{\pi}{2|ab|}$

327. 1

328. $\dfrac{23}{3}$

329. $\dfrac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$

330. $\dfrac{\pi}{2}$

331. $e-\sqrt{e}$

332. $3\log\dfrac{b}{b-a}$

333. $\dfrac{4}{3}$

334. 1

335. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$

336. $1-\dfrac{2}{e}$

337. $2-\dfrac{3}{4\log 2}$

338. $\pi^3-6\pi$

339. $\dfrac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$

340. $6-2e$

341. $7+2\log 2$

342. $2-\dfrac{\pi}{2}$

343. $\dfrac{32}{3}$

344. $8+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

345. $\log\dfrac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$

346. $\dfrac{\pi}{32}$

347. $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

348. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\log(2-\sqrt{3})$

349. $\dfrac{\pi}{4}$

350. $\dfrac{\sqrt{6}}{27}+\dfrac{\pi\sqrt{2}}{48}$

351. $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{8}{5}$

352. $4-\pi$

353. $\dfrac{2}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

353. $\dfrac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$

355. $\dfrac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$

356. $J_m = e - m\,J_{m-1}$

357. $J_{m,n}=\dfrac{n-1}{m+n}J_{m,n-2}=\dfrac{m-1}{m+n}J_{m-2,n}$

$$J_{m,n}=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\cdots(m+3)(m+1)},\quad \text{pro } n \text{ liché}$$

$$J_{m,n}=\frac{(m-1)(m-3)\cdots 4\cdot 2}{(m+n)(m+n-2)\cdots(n+3)(n+1)},\quad \text{pro } m \text{ liché}$$

$$\mathcal{I}_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot(m-1)(m-3)\cdots 3\cdot 1}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

pro m sudé a n sudé

358. $\mathcal{I}_n = \frac{n-1}{n}\mathcal{I}_{n-2}$

359. $\mathcal{I}_n = \frac{2n}{2n+1}\mathcal{I}_{n-1}$

360. $\mathcal{I}_n = \frac{n-2}{n-3}\mathcal{I}_{n-2}$

361. $\mathcal{I}_{2n} = \frac{1}{2n} - \mathcal{I}_{2n-1}$

362. $\mathcal{I}_n = -\frac{n}{m+1}\mathcal{I}_{n-1}$

363. $\mathcal{I}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{e} - n\mathcal{I}_{n-1}$

364. $\mathcal{I}_n = \frac{n-1}{n}\mathcal{I}_{n-2}$

7. Nevlastní integrály

366. $1 - \log 2$

367. $\frac{1}{2}$

368. Diverguje

369. $\frac{1}{3}$

370. Diverguje

371. 2

372. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2$

373. $\frac{\pi}{2}$

374. $\frac{1}{2}$

375. $\log \frac{\sqrt{a^4+1}+1}{a^2}$

376. $\frac{a}{a^2+b^2}$ pro $a > 0$, diverguje pro $a \leq 0$

377. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

378. Diverguje

379. π

380. Diverguje

381. $\frac{1}{a}$

382. $\frac{1}{2}$

383. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

384. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

385. $\frac{\pi}{2} - 1$

386. Konverguje

387. Diverguje

388. Konverguje

389. Diverguje

390. Diverguje

391. Konverguje

392. Diverguje

393. Konverguje pro $n > 0$ $(\alpha \neq 0)$

394. Konverguje pro $\min(p, q) < 1$, $\max(p, q) > 1$

395. Konverguje pro $1 < n < 2$

396. 1

397. Diverguje

398. 2

399. $-\frac{1}{4}$

400. $\frac{\pi}{2}$

401. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

402. $\frac{33\pi}{2}$

403. $\frac{102}{7}$

404. $6 - \frac{9}{2}\log 3$

405. $-\frac{2}{e}$

406. Diverguje

407. π

408. $\frac{8}{3}$

409. -1

410. $\frac{10}{7}$

411. Konverguje

412. Diverguje

413. Diverguje

414. Konverguje

415. Konverguje

416. Konverguje

417. Diverguje

418. Konverguje

419. Konverguje pro $p > -1$ a $q > -1$

420. $\frac{5\pi}{3}$

421. Konverguje pro $k < -1$

422. 1) Pro $k > 1$ konverguje, jinak diverguje 2) $\mathcal{J} = \frac{1}{(k-1)(\log 2)^{k-1}}$, $k > 1$

423. Konverguje pro $m < 3$

424. Konverguje pro $k < 1$

425. π

426. $n!$

427. $\frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2\, a^{2n-1}}$

428. $(-1)^n n!$

429. $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}\cdot\pi - \frac{3}{2}\log 2$

430. $\frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}$ (je-li $\alpha = \pi$, pak $\mathcal{J} = 1$)

431. $\sqrt{\pi}$

432. $\frac{\pi}{2}$ pro $a > b$, $\frac{\pi}{4}$ pro $a = b$, 0 pro $a < b$

433. $\frac{\pi}{2}$

434. $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$

435. $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$

436. $y = C\sin x - a$

437. $\log\left|tg\frac{y}{4}\right| = C - 2\sin\frac{x}{2}$

438. $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$

439. $Cx = \frac{y-1}{y}$

440. $e^t = C(1 - e^{-s})$

441. $10^x + 10^{-y} = C$

442. $1 + y^2 = C(1 - x^2)$

443. $t = \frac{1}{a}\left(l + \frac{b \cdot l^{1-n}}{1-n}\right)$

444. $x = \frac{\sqrt{k_1}\,(A-1)}{\sqrt{k_2}\,(A+1) + \sqrt{k_1}\,(A-1)}, \quad A = e^{\frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{b^2}t}$

445. $\cos x = \sqrt{2}\cos y$

446. $y = \frac{b + x}{1 + bx}$

447. $y = 1$

448. $v \approx 2{,}693\ m/s$

449. $x^2 = C^2 + 2Cy$

450. $\log|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$

451. $\log|y| + \frac{x}{y} = C$

452. $y - 2x = Cx^3(y + x)$

453. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \log C\sqrt{x^2 + y^2}$

454. $e^{\frac{y}{x}} = Cy$

455. $y = xe^{1 + Cx}$

456. $Cx = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

457. $(x + y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}$

458. $y^2 + x^2 = Cy$

459. $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

460. $y = -x$

461. $y^3 = y^2 - x^2$

462. Plocha vznikne rotací paraboly $y^2 = Cx$.

463. $\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{y^2}{x^2}$

464. $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$

465. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$

466. $x - 2y + \log|x + y| = C$

467. $e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}} = C(y + 2)$

468. $\log|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$

469. $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ **470.** $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$

471. $y = e^{-x^2}(C + \frac{x^2}{2})$ **472.** $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

473. $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$ pro $m \neq -a$

$y = (C + x)\, e^{mx}$ pro $m = -a$

474. $y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C)\frac{1}{\cos x}$

475. $y = Cx + x^2$ **476.** $y = e^x(\log|x| + \frac{x^2}{2}) + Ce^x$

477. $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$ **478.** $y = (C + e^x)(1+x)^n$

479. $y = \frac{x}{\cos x}$

480. $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

481. $y = \frac{e^x}{x} + \frac{ab - e^a}{x}$ **482.** $x = -t \operatorname{arctg} t$

483. $y = \frac{x}{x+1}(x - 1 + \log|x|)$

484. $y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}(2 + x^3)$ **485.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

486. $y = e^{2x}(C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}})$

487. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$

488. $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

489. $y = e^{-\frac{x}{2}}(C_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x})$

490. $y = xe^{2x}(x^2 + x)$

491. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$

492. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$

493. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x \sin x$

494. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x} + \frac{1}{8}e^x(\sin x - \cos x)$

495. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}(3\sin 2x + \cos 2x)$

496. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$

497. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \log\left|\cot g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

498. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{4} x \sin x - \frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$

499. $y = C_1 e^{-x\sqrt{2}} + C_2 e^{x\sqrt{2}} + x e^{x} \sin x + e^{x} \cos x$

500. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + x e^{-x} \log|x|$

501. $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$

502. $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{A}{\omega^2 - p^2} \sin pt$, pro $\omega \neq p$

$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{A}{2\omega} t \cos \omega t$, pro $\omega = p$

503. $y = e^{x}(x + C_1) - (e^{x} + 1)\log(e^{x} + 1) + C_2$

504. $y = C_1 e^{x} + C_2 - \cos e^{x}$

505. $y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin x + \sin 2x)$

506. $y = \frac{1}{8} e^{2x}(4x + 1) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$

507. $y = e^{x} + x^2$

508. $y = (1 + x) e^{-\frac{3}{2}x} + 2 e^{-\frac{5}{2}x}$

509. $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$

Literatura:

Štěpánek J.: Matematika pro chemiky-fyzikyI a II
SPN, Praha 1971 (skriptum)

Jarník V.: Diferenciální počet I,Academia Praha 1971

Jarník V.: Integrální počet I, Academia Praha 1971

Berman A.G.: Sbornik zadač po kursu matematičeskogo
analiza, Nauka, Moskva1972

Děmidovič B.I.: Problems in Mathematical Analysis,
Mir, Moskva 1967

Kamke,A.N.: Sbornik zadač po vysšej matematike
Moskva 1973

CVIČENÍ Z MATEMATIKY
pro I. ročník - chemie a biologie

Vlastimil Mikoláš, Jiří Rohn

Vydala Univerzita Karlova v Praze,1977
jako skriptum pro posluchače přírodovědecké fakulty
Vytiskla tiskárna rektorátu Univerzity Karlovy,
nám. Curieových 7,Praha 1
AA 5,51 - VA 5,70 . Vydání I. Náklad 200 výtisků.
Formát A4

MŠ čís. 33 421/62 VIII

60-56-77 17/31

Kčs 6,--