Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Rozhodování za neurčitosti: Pohled matematika na plánované hospodářství

Jiří Rohn
http://uivtx.cs.cas.cz/∼rohn

Technical report No. V-1269

27.06.2019

Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Prague 8, phone: +420 266 051 111, fax: +420 286 585 789,
e-mail:rohn@cs.cas.cz

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Rozhodování za neurčitosti: Pohled matematika na plánované hospodářství

Jiří Rohn[1]
http://uivtx.cs.cas.cz/∼rohn

Technical report No. V-1269

27.06.2019

Abstract:

V práci jsou popsány hlavní výsledky neoficiálního ekonomicko-matematického výzkumu provedeného v letech 1973-1980 pracovníky EML EÚ ČSAV a MFF (J. Bouška, J. Rohn a B. Kalendovský).

Zkratky:
EML = Ekonomicko-matematická laboratoř
EÚ ČSAV = Ekonomický ústav Československé akademie věd
MFF = Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy
SPK = Státní plánovací komise

Keywords:
Leontěvův model, intervalová data, zaručené řešení, neexistence, matice 28×28.

[1]This work was supported with institutional support RVO:67985807.

Rozhodování za neurčitosti: Pohled matematika na plánované hospodářství

J. Rohn

ÚI AV ČR a MFF UK

(rohn@cs.cas.cz)

Struktura národního hospodářství

Národní hospodářství rozčleněno na n odvětví:

x_i	celková výroba odvětví i
x_{ij}	spotřeba výrobků odvětví i v odvětví j
y_i	konečná spotřeba výrobků odvětví i.

Bilanční rovnice:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Leontěvův (meziodvětvový, input-output) model

Základní předpoklad:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

kde a_{ij} jsou konstanty (technické koeficienty), tj. bilanční rovnice má tvar

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

maticově

$$(I - A)x = y$$

($x \geq 0$ celková výroba, $y \geq 0$ konečná spotřeba, $A \geq 0$ matice technických koeficientů), tedy

$$x = (I - A)^{-1}y.$$

Cenový pohled

Předpokládáme, že existují ceny $p_i > 0$, při nichž každé odvětví je ziskové:

$$\text{cena vstupů} < \text{cena výstupu}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} x_j < p_j x_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_{ij} < p_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

maticově

$$A^T p < p.$$

Věta 1 *Cenový vektor $p > 0$ s touto vlastností existuje právě když*

$$\varrho(A) < 1.$$

Je-li tato podmínka splněna, je $(I - A)^{-1} \geq 0$.

Nepřesná data

Idea: Doc. ing. J. Bouška, CSc (EML EÚ ČSAV), $\sim$ 1973: vzít v potaz nepřesnost technických koeficientů

$$\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij},$$

maticově

$$\underline{A} \leq A \leq \overline{A},$$

a v souladu s tím požadovat dosažení konečné spotřeby pouze v předepsaném intervalu

$$\underline{y} \leq y \leq \overline{y}.$$

Požadavky na nepřesná data

Základní vlastnosti $A \geq 0$, $\varrho(A) < 1$, $y \geq 0$ mají být splněny pro *všechna* nepřesná data, což vede k požadavkům

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \underline{A} \geq 0, \\ \text{(ii)} & \varrho(\overline{A}) < 1, \\ \text{(iii)} & \underline{y} \geq 0. \end{array}$$

Jak plánovat při nepřesných datech?

Po počátečních studiích, které neměly vypovídací hodnotu, zaveden pojem zaručeného řešení ($\sim$ 1975):

Definice. Vektor x se nazývá zaručeným řešením, jestliže platí

$$(I - A)x \in [\underline{y}, \overline{y}]$$

pro každou matici $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$.

Vysvětlení. Za předpokladu, že $[\underline{A}, \overline{A}]$ obsahuje skutečnou hodnotu matice A, je zaručeno, že skutečná konečná spotřeba leží v požadovaném intervalu $[\underline{y}, \overline{y}]$.

Existence zaručených řešení

Věta 2 ($\sim$ 1976) *Za předpokladů (i)-(iii) zaručené řešení existuje právě když platí*

$$(I - \underline{A})(I - \overline{A})^{-1}\underline{y} \leq \overline{y}.$$

Je-li tato podmínka splněna, potom vektor

$$x_0 = (I - \overline{A})^{-1}\underline{y}$$

je zaručeným řešením a všechna zaručená řešení jsou popsána soustavou

$$(I - \underline{A})x \leq \overline{y},$$

$$(I - \overline{A})x \geq \underline{y}.$$

Ověřování I

$\sim$ 1978 – 1979: Doc. Bouškou ve spolupráci s experty z EÚ ČSAV (a SPK ?) sestaven na základě 2 oficiálních meziodvětvových bilancí, statistických a expertních odhadů intervalový model s maticí 28×28, a realistický intervalový požadavek na konečnou spotřebu.

B. Kalendovský (diplomová práce MFF 1980): pro zadaná data zaručené řešení **neexistuje**.

Jak modifikovat požadovaný výstup?

Myšlenka: nalézt minimální procentuální změnu, tj. minimální τ pro které k intervalu konečné spotřeby

$$[(1-\tau)\underline{y}, (1+\tau)\overline{y}]$$

bude existovat zaručené řešení.

Věta 3 *Minimální τ při kterém vzniká zaručené řešení je dáno vzorcem*

$$\tau_{\min} = \max_i \frac{((I-\underline{A})(I-\overline{A})^{-1}\underline{y} - \overline{y})_i}{((I-\underline{A})(I-\overline{A})^{-1}\underline{y} + \overline{y})_i}.$$

Ověřování II

B. Kalendovský (diplomová práce MFF 1980): pro vyšetřovaný model s maticí 28×28 je

$$\tau_{\text{min}} = 0,336$$

(tj. pro vznik zaručeného řešení nutná změna dat v obou směrech aspoň o $33,6\%$).

Tento výsledek považován za nepřijatelný z ekonomického i politického hlediska.

Matematické výsledky publikovány, ekonomické nikoliv.

Ve výzkumu nebylo dále pokračováno.

Závěr (osobní pohled)

Katastrofální hospodářské výsledky reálného socialismu nebyly náhodné.

Adekvátní zásobování trhu nebylo možno zajistit na základě takto nepřesných dat.

E. Kishon: “Komunismus je krásná idea. Bohužel byla uskutečněna.”