Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Globální implicitní funkce

Jiří Rohn
http://uivtx.cs.cas.cz/∼rohn

Technical report No. V-1276

02.02.2020

Pod Vodárenskou věží 2, 182 07 Prague 8, phone: +420 266 051 111, fax: +420 286 585 789,
e-mail:rohn@cs.cas.cz

Institute of Computer Science
Academy of Sciences of the Czech Republic

Globální implicitní funkce

Jiří Rohn
http://uivtx.cs.cas.cz/∼rohn

Technical report No. V-1276

02.02.2020

Abstract:

Tento text pochází z r. 1973 a nebyl dosud zveřejněn. Jeho hlavním výsledkem je věta o existenci a jednoznačnosti globální implicitní funkce v $\mathbb{R}^n$. Tomuto výsledku předchází řada pomocných tvrzení.

Keywords:
Silně lokálně souvislé množiny, iredundantní pokrytí, pokračování implicitní funkce, existence a jednoznačnost, globální implicitní funkce, inverzní zobrazení.

Úvod

Tato práce je věnována problematice existence "globální" implicitní funkce v E_n. Věty o lokální existenci jsou všeobecně známy. Pro eukleidovské prostory jsou uvedeny např. v [4], [5], [8], [9], zobecnění pro Banachovy prostory např. v [1], [7], [12], [13], [14]. Pokud je mi známo, není otázka existence "globální" implicitní funkce dosud uspokojivě vyřešena. Výsledky, uvedené v literatuře (viz např. [2], [15]) jsou většinou málo obecné a mají těžko verifikovatelné předpoklady. Mým cílem bylo dokázat "globální" existenci za předpokladů, jež by se co nejméně lišily od předpokladů lokální věty o existenci implicitní funkce. V existenční větě 2.5.1. (str. 26), která je hlavním výsledkem této práce, se kromě obvyklých předpokladů o funkci F (spojitost, regularita) požaduje pouze splnění jisté hraniční podmínky. Množina G, na níž je definována funkce F, má dosti obecný tvar, spec. to může být konvexní množina.

Práce je rozdělena na tři kapitoly. První kapitola, která zabírá polovinu celé práce, je věnována jistým topologickým vlastnostem prostorů E_n. Zavádí se zde pojem silně lokálně souvislé množiny a na konci této kapitoly je dokázána "věta o pokrývání" 1.4.1., na níž je založen důkaz existenční věty v kapitole 2. Pro potřeby důkazu věty o pokrývání zavádíme v odst. 1.3. pojem iredundantního pokrytí. Důkaz věty 1.3.1. nevyužívá žádných specifických vlastností eukleidovských prostorů, takže tato věta platí v libovolném topologickém prostoru.

Implicitními funkcemi se zabývá teprve druhá kapitola. V odst. 2.2. je uvedena definice implicitní funkce. Odst. 2.3. a 2.4. jsou věnovány limitě a pokračování implicitní funkce, v odst. 2.5. je dokázána existenční věta, která se v 2.6. používá pro důkaz věty o inverzním zobrazení.

Krátká 3. kapitola je věnována přibližné metodě výpočtu implicitní funkce pro případ jedné reálné funkce F r+1 proměnných.

Všechny věty, uvedené v této práci, jsou mé vlastní, s výjimkou vět o jednoznačnosti a lokální existenci implicitní funkce, citovaných v odst. 2.2. a lemmatu 2.3.1., jehož důkaz je přidán pro úplnost. Věta, analogická větě 2.3.1., se vyskytuje v knize [10] , avšak za mnohem méně obecných předpokladů.

Kapitola 1.

Silně lokálně souvislé množiny

1.1. Pomocné věty

Nechť E_n je eukleidovský prostor. Je-li $x \in E_n$, $1 \leq i \leq n$, pak x_i znamená i - tou souřadnici vektoru x. Symbolem $\|x\|$ rozumíme v prvních dvou kapitolách vždy eukleidovskou normu vektoru x, tj. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. Skalární součin vektorů x, y značíme (x, y).

Je-li $M \subset E_n$, pak hranici množiny M značíme $\mathcal{H}(M)$. Je-li $a \in E_n$, $r > 0$, pak otevřenou kouli o středu a a poloměru r značíme K(a,r), tj.

$$K(a,r) = \{x \in E_n; \|x - a\| < r\} .$$

Úsečku o krajních bodech a, b značíme $\overline{a,b}$, tj.

$$\overline{a,b} = \{a + t(b - a); 0 \leq t \leq 1\} .$$

Uvedeme nyní dvě věty, které využijeme v průběhu první kapitoly.

<u>Věta 1.1.1.</u> Nechť je dána koule $K = K(a,r)$ a bod $s \notin K$. Pro $x \in K$ nechť $p_1(x)$ je průsečík úsečky $\overline{x,s}$ s hranicí koule K. Položme $p(x) = \frac{1}{2}(x + p_1(x))$. Potom p je spojité zobrazení K do $K(a,r) \cap K(s, \|a - s\|)$ a pro každé x leží p(x) uvnitř úsečky $\overline{x,s}$.

<u>Důkaz.</u> 1) $p_1(x)$ leží uvnitř $\overline{x,s}$, p(x) leží uvnitř $\overline{p_1(x),x}$, tedy p(x) leží uvnitř $\overline{x,s}$.

2) pro $x \in K$ je $p(x) \in K$: je $x \in K$, $p_1(x) \in \mathcal{H}(K)$, K konvexní, tedy $p(x) = \frac{1}{2}(x + p_1(x)) \in K$.

3) pro $x \in K$ je $p(x) \in K(s, \|a - s\|)$: označme $p_2(x)$ druhý z průsečíků přímky procházející body x, s, s $\mathcal{H}(K)$, a položme $r(x) = \frac{1}{2}(p_1(x) + p_2(x))$. Potom je $(r(x) - a, r(x) - s) = 0$, tedy $\|a - s\|^2 = \|r(x) - a\|^2 + \|r(x) - s\|^2 \geq \|r(x) - s\|^2$, tj. $\|r(x) - s\| \leq \|a - s\|$. Protože $p(x)$ leží uvnitř úsečky $\overline{r(x), s}$, je $\|p(x) - s\| < \|r(x) - s\| \leq \|a - s\|$, cbd.

4) p je spojité: je $p_1(x) = x + t(s - x)$, $t > 0$, $\|p_1(x) - a\| = r$, tj. $r^2 = \|p_1(x) - a\|^2 = \|s - x\|^2 t^2 + 2(x - a, s - x)t + \|x - a\|^2$. Kvadratická rovnice

$$\|s - x\|^2 t^2 + 2(x - a, s - x)t + \|x - a\|^2 - r^2 = 0$$

má právě jeden kladný kořen

$$t = \frac{\sqrt{(x - a, s - x)^2 + \|s - x\|^2(r^2 - \|x - a\|^2)} - (x - a, s - x)}{\|s - x\|^2},$$

dále je $p(x) = \frac{1}{2}(x + p_1(x)) = x + \frac{t}{2}(s - x)$, a odtud spolu s vyjádřením t vyplývá, že p je spojité.

Definice 1.1.1. Nechť jsou dány dvě koule $K_i = K(a_i, r_i)$, $i = 1, 2$, $a_1 \neq a_2$. Položme

$$K_1/K_2 = \{x \in K_1 \cup K_2;\ \|x - a_1\|^2 - \|x - a_2\|^2 < r_1^2 - r_2^2\}.$$

Věta 1.1.2. Nechť $K_i = K(a_i, r_i)$, $i = 1, 2$, $a_1 \neq a_2$. Platí:

1) $K_1/K_2 \subset K_1$
2) $K_1 - (K_1/K_2) \subset K_1 \cap K_2$
3) K_1/K_2 je otevřená
4) K_1/K_2 je konvexní
5) $(K_1/K_2) \cap (K_2/K_1) = \emptyset$

Důkaz. Položme $\varphi(x) = \|x - a_1\|^2 - \|x - a_2\|^2$.

1) nechť $x \in K_1/K_2$. Kdyby bylo $x \in K_2 - K_1$, pak $x \in K_2$, $x \notin K_1$, $\varphi(x) < r_1^2 - r_2^2$, tj. $r_2^2 - \|x - a_2\|^2 < r_1^2 - \|x - a_1\|^2$, avšak $x \in K_2$, tj. $r_2^2 - \|x - a_2\|^2 > 0$, čili $r_1^2 - \|x - a_1\|^2 > 0$, tj. $x \in K_1$ - spor.

Proto $(K_1/K_2)\cap(K_2 - K_1) = \emptyset$, tedy $K_1/K_2 = (K_1/K_2)\cap(K_1\cup K_2) =$
$= (K_1/K_2)\cap(K_1\cup(K_2 - K_1)) = ((K_1/K_2)\cap K_1)\cup((K_1/K_2)\cap(K_2 - K_1)) =$
$= (K_1/K_2)\cap K_1 \subset K_1$, cbd.

2) je-li $x\in K_1 - (K_1/K_2)$, pak $x\in K_1$, $\|x - a_1\|^2 - \|x - a_2\|^2 \geq$
$\geq r_1^2 - r_2^2$, $r_2^2 - \|x - a_2\|^2 \geq r_1^2 - \|x - a_1\|^2 > 0$, tj. $x\in K_2$. Proto $K_1 - (K_1/K_2)\subset K_1\cap K_2$.

3) je $K_1/K_2 = (K_1\cup K_2)\cap\{x;\ \varphi(x) < r_1^2 - r_2^2\}$. Protože φ je spojitá, je množina $\{x;\ \varphi(x) < r_1^2 - r_2^2\}$ otevřená, $K_1\cup K_2$ je otevřená, tedy K_1/K_2 je otevřená.

4) nechť $x\in K_1/K_2$, $y\in K_1/K_2$. Položme $\nu(t) = \varphi(x + t(y - x))$, $t\in\langle 0,1\rangle$. Je $\nu(t) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + t(y_i - x_i) - a_{1i})^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i + t(y_i - x_i) - a_{2i})^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_{2i} - a_{1i})(2x_i + 2t(y_i - x_i) - a_{1i} - a_{2i})$, tedy ν je lineární funkcí t, proto $\nu(t) \leq \max(\nu(0), \nu(1)) = \max(\varphi(x), \varphi(y)) < r_1^2 - r_2^2$, proto $x + t(y - x)\in K_1/K_2$ pro každé $t\in\langle 0,1\rangle$, to znamená, že K_1/K_2 je konvexní.

5) je $K_2/K_1 = \{x\in K_2\cup K_1;\ \|x - a_2\|^2 - \|x - a_1\|^2 < r_2^2 - r_1^2\} =$
$= \{x\in K_1\cup K_2;\ \varphi(x) > r_1^2 - r_2^2\}$. Protože $K_1/K_2 = \{x\in K_1\cup K_2;\ \varphi(x) < r_1^2 - r_2^2\}$, je $(K_1/K_2)\cap(K_2/K_1) = \emptyset$, cbd.

1.2. Silně lokálně souvislé množiny

V tomto odstavci zavádíme pojem silně lokálně souvislé množiny a uvádíme některé základní vlastnosti.

Definice 1.2.1. Říkáme, že množina $M\subset E_n$ je silně lokálně souvislá v bodě $a\in\overline{M}$, jestliže ke každému okolí V bodu a existuje okolí U bodu a takové, že $U\subset V$ a množina $U\cap M$ je souvislá.

Věta 1.2.1. Množina M je silně lokálně souvislá v bodě a právě když existuje nerostoucí fundamentální systém $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ okolí bodu a takový, že pro každé n je množina $U_n \cap M$ souvislá.

Důkaz. Nechť existuje fundamentální systém uvedené vlastnosti. Je-li V okolí a, pak existuje n, že $U_n \subset V$; přitom $U_n \cap M$ je souvislá, takže M je silně lokálně souvislá v bodě a. Naopak, nechť M je silně lokálně souvislá v bodě a. Fundamentální systém sestrojíme indukcí: 1) k okolí $V = K(a,1)$ existuje okolí U, že $U \subset V$ a $U \cap M$ je souvislá; položme $U_1 = U$. 2) jsou-li už sestrojena okolí $U_1, \dots, U_n$, pak k okolí $V = U_n \cap K(a,\frac{1}{n+1})$ existuje okolí U_{n+1}, že $U_{n+1} \subset V$ a $U_{n+1} \cap M$ je souvislá. Přitom pro každé n je $U_{n+1} \subset U_n$, $U_n \subset K(a,\frac{1}{n})$, takže $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ je fundamentální systém uvedené vlastnosti.

Poznámka. Při důkazu věty 1.2.1. jsme využili axiómu výběru v jeho "slabé" formě, která je v analýze poměrně běžná (viz např. důkaz Heineho podmínky pro existenci limity). Všechny další věty, v nichž se vyskytuje pojem silné lokální souvislosti, bychom však mohli dokázat i tehdy, kdybychom za definici silné lokální souvislosti přijali ekvivalentní vyjádření pomocí fundamentálního systému, jak je uvedeno ve větě 1.2.1., čímž bychom obešli i tuto formu axiómu výběru. Přiklonili jsme se však raději k uvedené definici 1.2.1., která odpovídá přijatým zvyklostem. Poznamenejme ještě, že v případě, že $a \in M$, lze větu 1.2.1. dokázat i bez axiómu výběru: stačí položit $U_n = \bigcup_{W \in P} W$, kde $P = \{W \subset U_{n-1} \cap K(a,\frac{1}{n});\ W$ je okolí a, $W \cap M$ je souvislá$\}$. Potom pro každé $W \in P$ množina $W \cap M$ obsahuje a, tedy množina $U_n \cap M = \bigcup_{W \in P} (W \cap M)$ je souvislá.

Věta 1.2.2. Nechť množina $M \subset E_n$ je silně lokálně souvislá v bodě $a \in \bar{M} - M$ a funkce $f\colon M \to E_m$ je spojitá. Položme

$L = \{y \in E_m;$ existují $x_n \in M$, $n = 1,2,\dots$, $x_n \to a$, $f(x_n) \to y\}$.

Pak

1) $L = \emptyset$ právě když $\lim\limits_{x\to a} \|f(x)\| = +\infty$

2) $L = \{b\}$ právě když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

3) obsahuje-li L aspoň dva různé body, pak žádný bod množiny L není izolovaný

<u>Důkaz.</u> 1) je zřejmé, že je-li $\lim\limits_{x\to a} \|f(x)\| = +\infty$, pak $L = \emptyset$. Naopak, kdyby bylo $L = \emptyset$ a neplatilo by $\lim\limits_{x\to a} \|f(x)\| = +\infty$, pak by existovalo číslo $K > 0$ a posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in M$, $x_n \to a$, $\|f(x_n)\| \leq K$. Pak by existovala vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \in M$, $x_{n_k} \to a$, $f(x_{n_k}) \to y$, $\|y\| \leq K$, tj. $y \in L$ - spor.

Pro potřeby důkazu 2), 3) dokážeme nejprve toto tvrzení: je-li $b \in L$ a není $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, pak existuje číslo $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro každé ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, existuje $z \in L$, $\|z - b\| = \varepsilon$. Nechť $\{U_n\}$ je nerostoucí fundamentální systém okolí bodu a takový, že pro každé n je množina $U_n \cap M$ souvislá. Protože neplatí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro každé okolí U bodu a existuje $x \in U \cap M$, že $\|f(x) - b\| \geq \varepsilon_0$. Nechť $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Zvolme přirozené n. Podle předchozího existuje $x \in U_n \cap M$, $\|f(x) - b\| \geq \varepsilon_0$. Protože $b \in L$, existuje $y \in U_n \cap M$, že $\|f(y) - b\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože množina $\{\|f(x) - b\|;\ x \in U_n \cap M\}$ je souvislá, existuje $z_n \in U_n \cap M$, $\|f(z_n) - b\| = \varepsilon$. Z posloupnosti $\{f(z_n)\}$ vybereme konvergentní posloupnost $\{f(z_{n_k})\}$. Pak $z_{n_k} \in M$, $z_{n_k} \to a$, $f(z_{n_k}) \to z$, tj. $z \in L$, $\|z - b\| = \varepsilon$, cbd.

2) je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, pak $L = \{b\}$ .Kdyby bylo $L = \{b\}$ a neplatilo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, pak podle předchozího by bylo $L \neq \{b\}$ - spor.

3) nechť L obsahuje aspoň dva různé body. Pak podle 2) pro žádné $c \in L$ není $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, takže z výše dokázaného tvrzení plyne, že bod c není izolovaný.

Definice 1.2.2. Říkáme, že množina $M \subset E_n$ je silně lokálně souvislá (zkr. SLS), jestliže je silně lokálně souvislá v každém bodě $a \in \overline{M}$.

Věta 1.2.3. Nechť M je silně lokálně souvislá množina v E_n, nechť $b \in E_n$, $\alpha \in E_1$. Potom množiny $M + b$, αM jsou silně lokálně souvislé.

Důkaz. 1) nechť $a \in \overline{M + b}$. Protože $\overline{M + b} = \overline{M} + b$, existuje $z \in \overline{M}$, že $a = z + b$. Nechť V je okolí bodu a. Potom $V - b$ je okolí bodu z. Protože množina M je silně lokálně souvislá v bodě z, existuje okolí U bodu z, že $U \subset V - b$ a množina $U \cap M$ je souvislá. Pak $U + b$ je okolí bodu a, $U + b \subset V$, $(U + b) \cap \cap (M + b) = (U \cap M) + b$ a protože množina $U \cap M$ je souvislá, je i množina $(U + b) \cap (M + b)$ souvislá, tedy $M + b$ je silně lokálně souvislá v bodě a. Protože a byl libovolný bod množiny $\overline{M + b}$, je množina $M + b$ silně lokálně souvislá.

2) nechť $\alpha \neq 0$. Nechť $a \in \overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$. Pak existuje $w \in \overline{M}$, že $a = \alpha w$. Nechť V je okolí bodu a, pak $\frac{1}{\alpha} V$ je okolí bodu w, a vzhledem k tomu, že M je silně lokálně souvislá v bodě w, existuje okolí U bodu w, že $U \subset \frac{1}{\alpha} V$, $U \cap M$ souvislá. Potom αU je okolí bodu a , $\alpha U \subset V$, $(\alpha U) \cap (\alpha M) = \alpha (U \cap M)$, což je souvislá množina, takže αM je silně lokálně souvislá.

3) nechť $\alpha = 0$. Pak $\alpha M = \{0\}$, a každá jednobodová množina je silně lokálně souvislá.

<u>Definice 1.2.3.</u> Bod $x_0 \in M$ nazýváme středem množiny $M \subset E_n$, jestliže pro každé $x \in \overline{M}$ je $\overline{x_0, x} - \{x\} \subset M$. Množinu, která má střed, nazveme hvězdicovitou (z angl. star-like).

<u>Poznámka.</u> 1) hvězdicovitá množina je souvislá;

2) je-li x_0 středem M, $x \in M$, pak $\overline{x_0, x} \subset M$;

3) je-li M konvexní množina s neprázdným vnitřkem, pak M je hvězdicovitá a každý bod jejího vnitřku je jejím středem;

4) jsou-li M, N hvězdicovité množiny se středem x_0, pak množina $M \cap N$ je hvězdicovitá se středem x_0.

<u>Věta 1.2.4.</u> Nechť G je neomezená otevřená hvězdicovitá silně lokálně souvislá množina v E_n, nechť x_0 je jejím středem. Potom existují omezené otevřené hvězdicovité silně lokálně souvislé množiny G_n, $n = 1, 2, \ldots$, takové, že pro každé n je x_0 středem G_n, $G_n \subset G_{n+1}$ a $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

<u>Poznámka.</u> Povšimněme si, že G je neomezená, kdežto každá G_n je omezená. Tato věta je podstatná pro druhou část důkazu věty o pokrývání (viz odst. 1.4.).

<u>Důkaz.</u> Položme $G_n = G \cap K(x_0, n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Pak G_n je omeze[illegible] otevřená hvězdicovitá množina, x_0 je středem G_n, $G_n \subset G_{n+1}$. Zbývá tedy dokázat, že G_n je SLS (silně lokálně souvislá). Nechť $a \in \overline{G_n}$. Protože $\overline{G_n} \subset \overline{G}$, rozlišíme dva případy.

1) nechť $a \in G$; nechť V je okolí a. Zvolme $r > 0$, aby $K(a, r) \subset$ $\subset V \cap G$. Potom $K(a, r) \cap G_n = K(a, r) \cap G \cap K(x_0, n) = K(a, r) \cap K(x_0, n)$ a tato množina je konvexní, tedy souvislá. Proto G_n je silně lokálně souvislá v bodě a.

2) nechť $a \in \mathcal{H}(G)$; nechť V je okolí a. Zvolme r, $0 < r < \| a -$ [illegible] $K(a, r) \subset V$. Existuje okolí U bodu a, že $U \subset K(a, r)$, $U \cap G$ souvislá. Položme $W = U \cup \bigcup_{x \in U \cap G} (\overline{x, x_0} \cap K(a, r))$. Potom $U \subset W \subset K(a, r) \subset V$,

tedy W je okolí bodu a, $W \subset V$. Dále je $W \cap G = (U \cap G) \cup$ $\cup \bigcup_{x \in U \cap G} (\overline{x,x_0} \cap G \cap K(a,r))$; vzhledem k tomu, že pro $x \in G$ je $\overline{x,x_0} \subset$ $\subset G$, tj. $\overline{x,x_0} \cap G = \overline{x,x_0}$, je

(1) $$W \cap G = (U \cap G) \cup \bigcup_{x \in U \cap G} (\overline{x,x_0} \cap K(a,r)) .$$

Množina $U \cap G$ je souvislá a pro $x \in U \cap G$ je $\overline{x,x_0} \cap K(a,r)$ souvislá, $(U \cap G) \cap (\overline{x,x_0} \cap K(a,r)) \neq \emptyset$, takže $W \cap G$ je souvislá.

Nyní ukážeme, že platí: je-li $z \in W \cap G$, $y \in \overline{z,x_0} \cap K(a,r)$, pak $y \in W \cap G$. Skutečně, z (1) plyne $W \cap G = \bigcup_{x \in U \cap G} (\overline{x,x_0} \cap K(a,r))$; proto, je-li $z \in W \cap G$, $y \in \overline{z,x_0} \cap K(a,r)$, pak existuje $x \in U \cap G$, že $z \in \overline{x,x_0} \cap K(a,r)$; to znamená, že $y \in \overline{x,x_0} \cap K(a,r)$, tedy $y \in W \cap G$.

Nechť nyní p je funkce, definovaná pro kouli $K(a,r)$ a bod $s = x_0$ tak, jak je uvedeno ve větě 1.1.1. Ukážeme, že $p(W \cap G) \subset$ $\subset W \cap G_n$. Pro $z \in W \cap G$ je $p(z) \in K(a,r) \cap K(x_0, \|a - x_0\|) \subset K(a,r) \cap$ $\cap K(x_0,n)$. Speciálně $p(z) \in K(a,r)$, podle věty 1.1.1. $p(z) \in \overline{z,x_0}$, takže z předchozího plyne, že $p(z) \in W \cap G \cap K(x_0,n) = W \cap G_n$. Proto $p(W \cap G) \subset W \cap G_n$.

Množinu $W \cap G_n$ můžeme nyní psát v tomto tvaru:

(2) $$W \cap G_n = p(W \cap G) \cup \bigcup_{z \in W \cap G_n} \overline{z,p(z)}$$

Protože pro každé $z \in W \cap G_n$ je $z \in \overline{z,p(z)}$, je inkluze $W \cap G_n \subset$ $\subset p(W \cap G) \cup \bigcup_{z \in W \cap G_n} \overline{z,p(z)}$ zřejmá. Naopak, podle předchozího je $p(W \cap G) \subset W \cap G_n$; dále, je-li $z \in W \cap G_n \subset W \cap G$, pak $p(z) \in W \cap G_n$, tedy $\overline{z,p(z)} \subset W \cap G_n$. Tím je (2) dokázáno. Protože $p(W \cap G)$ je souvislá a pro každé $z \in W \cap G_n$ je $p(W \cap G) \cap \overline{z,p(z)} \neq \emptyset$, je množina $W \cap G_n$ souvislá. Tedy G_n je silně lokálně souvislá, cbd.

Odbočíme nyní na chvíli od problematiky silně lokálně souvislých množin a věnujeme další odstavec pomocnému pojmu iredundantního pokrytí, který je důležitý pro další větu o silně lokálně souvislých množinách, totiž větu o pokrývání, která je z našeho hlediska nejdůležitější větou první kapitoly.

1.3. Iredundantní pokrytí

Definice 1.3.1. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{U}$ množiny $M \subset E_n$ je iredundantní, jestliže pro každé $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ je buď $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ nebo $U_1 \cap U_2 \cap M \neq \emptyset$.

Poznámka. 1) ekvivalentní formulace je tato: jsou-li $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, pak $U_1 \cap U_2 \cap M \neq \emptyset$.

2) je-li $\mathcal{U}$ iredundantní pokrytí množiny M, $U \in \mathcal{U}$; $U \neq \emptyset$, pak $U \cap M \neq \emptyset$.

Věta 1.3.1. Nechť $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí množiny $M \subset E_n$. Potom existuje otevřená množina N, $M \subset \overline{N}$, taková, že do $\mathcal{U}$ lze vepsat otevřené iredundantní pokrytí množiny N.

Důkaz. Případ $M = \emptyset$ je zřejmý. Nechť tedy $M \neq \emptyset$, pak $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Položme $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} ; U \cap M \neq \emptyset\}$. Pak $\mathcal{V}$ je pokrytí množiny M, vepsané do $\mathcal{U}$. Označme $\mathcal{F}$ množinu všech funkcí, definovaných na $\mathcal{V}$, s těmito vlastnostmi:

(a) pro každé $U \in \mathcal{V}$ je $f(U)$ otevřená množina, $f(U) \subset U$

(b) je-li $U_1, U_2 \in \mathcal{V}$, pak buď $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$ nebo $f(U_1) \cap \cap f(U_2) \cap M \neq \emptyset$.

Potom $\mathcal{F} \neq \emptyset$: zvolme $U_0 \in \mathcal{V}$ a položme $f_0(U_0) = U_0$, $f_0(U) = \emptyset$ pro $U \neq U_0$; pak $f_0 \in \mathcal{F}$. Na $\mathcal{F}$ zaveďme relaci "$\leq$": $f \leq g$ právě když pro každé $U \in \mathcal{V}$ je $f(U) \subset g(U)$. Potom "$\leq$" je relací částečného uspořádání na $\mathcal{F}$. Další postup důkazu bude tento:

1) dokážeme pomocí Zornova lemmatu, že $\mathcal{F}$ má maximální prvek h

2) položíme $N = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} h(U)$ a dokážeme, že $M \subset \overline{N}$

3) dokážeme, že $\{h(U); U \in \mathcal{V}\}$ tvoří iredundantní pokrytí N.

1) nechť $\emptyset \neq \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ lineárně uspořádaná. Definujme na $\mathcal{V}$ funkci g předpisem $g(U) = \bigcup_{f \in \mathcal{G}} f(U)$ pro každé $U \in \mathcal{V}$. Potom pro kaž-

dé $U \in \mathcal{V}$ je $g(U)$ otevřená množina, $g(U) \subset U$, tedy g splňuje (a). Ukážeme, že splňuje i (b). Nechť $g(U_1) \cap g(U_2) \neq \emptyset$. Pak existují $f_1, f_2 \in \mathcal{G}$ tak, že $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \neq \emptyset$. Protože $\mathcal{G}$ je lineárně uspořádaná, je buď $f_1 \leq f_2$ nebo $f_2 \leq f_1$; nechť např. $f_1 \leq f_2$. Potom $\emptyset \neq f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \subset f_2(U_1) \cap f_2(U_2)$, tedy $\emptyset \neq f_2(U_1) \cap$ $\cap f_2(U_2) \cap M \subset g(U_1) \cap g(U_2) \cap M$. Proto $g \in \mathcal{F}$, přičemž pro každé $f \in \mathcal{G}$ je $f \leq g$. Tedy $\mathcal{F}$ je induktívní, takže podle Zornova lemmatu má $\mathcal{F}$ maximální prvek h.

2) položme $N = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} h(U)$, pak N je otevřená. Ukážeme, že $M \subset \overline{N}$. ~~V $\overline{N}$, tj. M $\overline{N}$, neboť je pokrytím M.~~ Předpokládejme spo-
V
rem, že existuje $x \in M - \overline{N}$. Pak $x \notin \overline{N}$ a existuje $V \in \mathcal{V}$, $x \in V$. Pak existuje otevřené okolí W bodu x, $W \subset V$, $W \cap \overline{N} = \emptyset$, tj. $W \cap h(U) = \emptyset$ pro každé $U \in \mathcal{V}$. Definujme funkci k předpisem: $k(V) = h(V) \cup W$, $k(U) = h(U)$ pro $U \in \mathcal{V}$, $U \neq V$. Ukážeme, že $k \in \mathcal{F}$. (a) je zřejmé. (b): nechť $k(U_1) \cap k(U_2) \neq \emptyset$. Rozlišíme tři případy: (b1) nechť $U_1 \neq V \neq U_2$, pak $k(U_1) \cap k(U_2) \cap M = h(U_1) \cap$ $\cap h(U_2) \cap M \neq \emptyset$. (b2) nechť $U_1 = V$, $U_2 \neq V$: pak $\emptyset \neq k(U_1) \cap k(U_2) =$ $= (h(U_1) \cup W) \cap h(U_2) = (h(U_1) \cap h(U_2)) \cup (W \cap h(U_2)) = h(U_1) \cap h(U_2)$, takže $\emptyset \neq h(U_1) \cap h(U_2) \cap M = k(U_1) \cap k(U_2) \cap M$. (b3) nechť $U_1 =$ $= U_2 = V$, pak $k(U_1) \cap k(U_2) \cap M = k(V) \cap M = (h(V) \cup W) \cap M =$ $= (h(V) \cap M) \cup (W \cap M) \neq \emptyset$, neboť $W \cap M \neq \emptyset$ (totiž $x \in W \cap M$). Ve všech třech případech je $k(U_1) \cap k(U_2) \cap M \neq \emptyset$, tedy $k \in \mathcal{F}$. Avšak $h < k$ (neboť $h(V) \subset k(V)$, $h(V) \neq k(V)$), a to je spor s maximalitou h, proto musí být $M - \overline{N} = \emptyset$, tj. $M \subset \overline{N}$.

3) otevřené pokrytí $\{h(U);\ U \in \mathcal{V}\}$ množiny N je vepsané do $\mathcal{V}$ a tedy i do $\mathcal{U}$. Zbývá dokázat, že je iredundantní. Nechť $h(U_1) \cap$ $\cap h(U_2) \neq \emptyset$. Pak existuje $x \in h(U_1) \cap h(U_2) \cap M$. Je $x \in M \subset \overline{N}$, $h(U_1) \cap h(U_2)$ je okolí $x \in \overline{N}$, takže $h(U_1) \cap h(U_2) \cap N \neq \emptyset$.

Tím je důkaz proveden.

Tuto větu jsme uvedli jen pro zajímavost, neboť ji v dalším nepoužijeme, protože nezaručuje existenci vepsaného iredundantního pokrytí celé množiny M. Tuto existenci však můžeme zaručit, je-li M kompaktní:

<u>Věta 1.3.2.</u> Do každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny $M \subset E_m$ lze vepsat konečné otevřené konvexní iredundantní pokrytí množiny M.

<u>Důkaz.</u> Případ $M = \emptyset$ je jasný. Nechť tedy M je neprázdná a $\mathcal{V}$ je její otevřené pokrytí. Položme

$$\mathcal{W} = \{ K(a,r);\ K(a,r) \cap M \neq \emptyset \text{ a ex. } V \in \mathcal{V},\ K(a,r) \subset V \} .$$

Potom $\mathcal{W}$ je pokrytí množiny M otevřenými koulemi, vepsané do $\mathcal{V}$. Z pokrytí $\mathcal{W}$ lze vybrat konečné podpokrytí, nechť je to $\{K_j\}_{j=1}^{n}$. Pro každé $i = 1,2,\ldots,n$ položme

$$I_i = \{ j;\ K_i \cap K_j \cap M = \emptyset \}$$

$$U_i = \begin{cases} K_i & \text{pro } I_i = \emptyset \\ \bigcap\limits_{j \in I_i} (K_i/K_j) & \text{pro } I_i \neq \emptyset \quad \text{(viz def. 1.1.1.)} \end{cases}$$

Potom pro každé i, $1 \leq i \leq n$, je U_i podle věty 1.1.2. otevřená konvexní množina, $U_i \subset K_i$.

Nejprve ukážeme, že pro každé i, $1 \leq i \leq n$, je $U_i \cap M = K_i \cap M$. To je jasné pro $I_i = \emptyset$. Nechť tedy $I_i \neq \emptyset$. Inkluze $U_i \cap M \subset K_i \cap M$ je zřejmá. Dále je $(K_i \cap M) - (U_i \cap M) = (K_i - U_i) \cap M = (K_i - \bigcap_{I_i} (K_i/K_j)) \cap M = (\bigcup_{I_i} (K_i - (K_i/K_j))) \cap M \subset M \cap \bigcup_{I_i} (K_i \cap K_j) = \bigcup_{j \in I_i} (K_i \cap K_j \cap M) = \emptyset$. Proto $K_i \cap M \subset U_i \cap M$, tj. $K_i \cap M = U_i \cap M$.

To znamená, že $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ je pokrytí M, neboť $M = M \cap (\bigcup_i K_i) = \bigcup_i (K_i \cap M) = \bigcup_i (U_i \cap M) = M \cap \bigcup_i U_i \subset \bigcup_i U_i$.

Dokážeme, že $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ je iredundantní. Nechť $1 \leq i,k \leq n$. Jsou dvě možnosti: 1) $K_i \cap K_k \cap M \neq \emptyset$, pak $U_i \cap U_k \cap M = (U_i \cap M) \cap (U_k \cap M) = (K_i \cap M) \cap (K_k \cap M) = K_i \cap K_k \cap M \neq \emptyset$. 2) $K_i \cap K_k \cap M = \emptyset$. Potom je

$k \in I_i$, $i \in I_k$, takže $U_i \subset K_i/K_k$, $U_k \subset K_k/K_i$, $U_i \cap U_k \subset (K_i/K_k) \cap \cap (K_k/K_i) = \emptyset$, tedy $U_i \cap U_k = \emptyset$. Proto pokrytí $\{U_i\}_{i=1}^n$ je iredundantní. Již dříve jsme dokázali, že je konečné, otevřené a konvexní. Protože je vepsané do $\{K_i\}_{i=1}^n$ a to je vepsané do $\mathcal{V}$, je $\{U_i\}_{i=1}^n$ vepsané do $\mathcal{V}$, cbd.

1.4. Věta o pokrývání

Věta o pokrývání (věta 1.4.1.) je hlavním výsledkem první kapitoly. Jak se ukáže v kapitole 2, je v důkazu věty o pokrývání vlastně obsažena myšlenka "pokračování" implicitní funkce (resp. její topologický princip), umožňující přechod od lokální existenční věty k její "globální" formě.

Nejprve uvedeme pomocné lemma.

Lemma 1.4.1. Nechť $M \subset (0,1\rangle$ a platí:

(a) $M \neq \emptyset$

(b) je-li $\alpha \in M$, pak $(0,\alpha\rangle \subset M$

(c) je-li $(0,\alpha) \subset M$, pak $\alpha \in M$

(d) ke každému $\alpha \in M$, $\alpha < 1$, existuje $\gamma \in M$, $\alpha < \gamma$

Potom $M = (0,1\rangle$.

Důkaz. Položme $s = \sup M$. Je-li $0 < \beta < s$, pak existuje $\alpha \in M$, $\beta < \alpha \leq s$, tj. podle (b) je $\beta \in M$. Tedy $(0,s) \subset M$, podle (c) je $(0,s\rangle \subset M$. Kdyby bylo $s < 1$, existovalo by podle (d) $\gamma \in M$, $s < \gamma$ spor, proto $s = 1$, $(0,1\rangle \subset M \subset (0,1\rangle$, tedy $M = (0,1\rangle$, cbd.

Pro účely následujícího důkazu zaveďme toto označení:

je-li $L \subset E_n$, položme $d(L) = \sup_{x,y \in L} \|x - y\|$

Věta 1.4.1. Nechť $G \subset E_n$ je otevřená hvězdicovitá silně lokálně souvislá množina a nechť S je systém jejích otevřených souvislých podmnožin, mající tyto vlastnosti:

1) $S \neq \emptyset$

2) existuje střed x_0 množiny G takový, že $x_0 \in \bigcap_{V \in S} V$ a je-li U otevřená souvislá množina, $x_0 \in U \subset V \in S$, pak $U \in S$

3) je-li $\emptyset \neq R \subset S$ a je-li pro každá $V_1, V_2 \in R$ množina $V_1 \cap V_2$ souvislá, pak $\bigcup_{V \in R} V \in S$

4) je-li množina $V \in S$ silně lokálně souvislá v bodě $a \in \mathcal{H}(V) \cap G$, pak existuje okolí U bodu a takové, že $V \cup U \in S$.

Potom $G \in S$.

Důkaz. Rozlišíme dva případy:

A) G je omezená

B) G je neomezená.

A) Položme $d = d(G) < \infty$. Pro $\alpha \in (0,1\rangle$ položme

$$G_\alpha = x_0 + \alpha(G - x_0)$$

(kde $G - x_0 = \{g - x_0;\ g \in G\}$). Potom pro každé $\alpha \in (0,1\rangle$ je G_α otevřená hvězdicovitá (tedy souvislá) silně lokálně souvislá množina se středem x_0 a pro $\alpha_1 \leq \alpha_2$ je $G_{\alpha_1} \subset G_{\alpha_2}$. Dále je $\overline{G_\alpha} = \overline{x_0 + \alpha(G - x_0)} = x_0 + \alpha(\overline{G - x_0}) = x_0 + \alpha(\overline{G} - x_0)$,
$d(G_\alpha) = \sup_{x,y \in G_\alpha} \|x - y\| = \alpha \sup_{x,y \in G} \|x - y\| = \alpha d(G) = \alpha d$.

Položme

$$M = \{\alpha;\ G_\alpha \in S\}.$$

Ukážeme, že M splňuje (a) - (d) lemmatu 1.4.1.

(a) zvolme $V \in S$, takže $x_0 \in V$ a existuje $r > 0$, že $K(x_0, r) \subset V$. Nechť $0 < \alpha < \frac{r}{d}$. Je-li $x \in G_\alpha$, pak $\|x - x_0\| = \alpha \|z - x_0\| \leq \alpha d < r$, tedy $x \in K(x_0, r)$. Proto $x_0 \in G_\alpha \subset K(x_0, r) \subset V \in S$, G_α otevřená souvislá, takže podle 2) je $G_\alpha \in S$, tj. $\alpha \in M$. Tedy $M \neq \emptyset$.

(b) nechť $\alpha \in M$, $0 < \beta < \alpha$. Ukážeme, že $G_\beta \in S$, tj. $\beta \in M$.

Nechť $z \in G_\beta$, to znamená, že existuje $x \in G$, $z = x_0 + \beta (x - x_0)$. Položme $y = x_0 + \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$. Protože $\frac{\beta}{\alpha} < 1$, je $y \in G$ a je $z = x_0 + \beta (x - x_0) = x_0 + \alpha (y - x_0) \in G_\alpha$. Proto $G_\beta \subset G_\alpha \in S$, takže opět podle 2) je $G_\beta \in S$, tj. $\beta \in M$.

(c) nechť $(0, \alpha) \subset M$, ukážeme, že $\alpha \in M$. K tomu nejprve dokážeme, že $G_\alpha = \bigcup_{\beta \in (0,\alpha)} G_\beta$. Pro $\beta < \alpha$ je $G_\beta \subset G_\alpha$, tedy $\bigcup_{(0,\alpha)} G_\beta \subset G_\alpha$. Naopak, nechť $x \in G_\alpha$, tj. $x = x_0 + \alpha (z - x_0)$, $z \in G$. Protože G je otevřená, existuje $w \in G$, že z leží uvnitř úsečky $\overline{x_0, w}$. Položme $\beta = \alpha \frac{\|z - x_0\|}{\|w - x_0\|}$, pak $\beta < \alpha$ a $w = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}(z - x_0)$. Přitom $x = x_0 + \alpha (z - x_0) = x_0 + \beta (w - x_0) \in G_\beta$. Tedy $G_\alpha \subset \bigcup_{\beta \in (0,\alpha)} G_\beta$, proto $G_\alpha = \bigcup_{\beta \in (0,\alpha)} G_\beta$. Nyní položme $R = \{ G_\beta ; 0 < \beta < \alpha \}$. Pak $R \subset S$ a pro $0 < \beta_1, \beta_2 < \alpha$ je $G_{\beta_1} \cap G_{\beta_2} = G_{\min(\beta_1, \beta_2)}$, tedy je to souvislá množina. Proto podle 3) je $\bigcup_{\beta \in (0,\alpha)} G_\beta = G_\alpha \in S$, tj. $\alpha \in M$.

(d) nechť $\alpha \in M$, $\alpha < 1$. Pak $G_\alpha \in S$, $\overline{G_\alpha} \subset G$, G_α silně lokálně souvislá; proto podle 4) ke každému $a \in \partial(G_\alpha)$ existuje okolí V_a bodu a takové, že $G_\alpha \cup V_a \in S$. Nechť pro každé $a \in \partial(G_\alpha)$ je U_a otevřené souvislé okolí a, $U_a \subset V_a$. Potom $G_\alpha \cap U_a \neq \emptyset$, takže množina $G_\alpha \cup U_a$ je otevřená souvislá, $x_0 \in G_\alpha \cup U_a \subset G_\alpha \cup V_a \in S$, proto podle 2) je $G_\alpha \cup U_a \in S$. Do otevřeného pokrytí $\{ U_a ; a \in \partial(G_\alpha) \}$ kompaktní množiny $\partial(G_\alpha)$ lze podle věty 1.3.2. vepsat konečné otevřené konvexní iredundantní pokrytí $\{ U_j \}_{j=1}^m$ množiny $\partial(G_\alpha)$. Pro $j = 1, 2, \ldots, m$ položme $W_j = G_\alpha \cup U_j$. Protože $U_j \cap \partial(G_\alpha) \neq \emptyset$, je $U_j \cap G_\alpha \neq \emptyset$, takže W_j je souvislá otevřená množina a existuje $a_j \in \partial(G_\alpha)$, $x_0 \in W_j \subset G_\alpha \cup U_{a_j} \in S$, tj. $W_j \in S$. Položme $R = \{ W_j ; j = 1, 2, \ldots, m \}$. Nechť $1 \leq i, j \leq m$. Pak $W_i \cap W_j = (G_\alpha \cup U_i) \cap (G_\alpha \cup U_j) = G_\alpha \cup (U_i \cap U_j)$. Protože $\{ U_j \}$ je iredundantní pokrytí $\partial(G_\alpha)$, jsou možné dva případy:
1) $U_i \cap U_j = \emptyset$, pak $W_i \cap W_j = G_\alpha$, tedy $W_i \cap W_j$ je souvislá. 2) $U_i \cap U_j \cap \partial(G_\alpha) \neq \emptyset$, pak $U_i \cap U_j \cap G_\alpha \neq \emptyset$. Protože množiny G_α,

$U_i \cap U_j$ jsou souvislé, je pak $G_\alpha \cup (U_i \cap U_j)$ souvislá, tedy i v tom to případě je $W_i \cap W_j$ souvislá. Proto podle 3) je $W = \bigcup_{j=1}^{m} W_j = G_\alpha \cup \bigcup_{j=1}^{m} U_j \in S$. Přitom W je otevřená množina, $\overline{G_\alpha} \subset W$, takže množina $\overline{G_\alpha}$ má od uzavřené množiny $E_n - W$ kladnou vzdálenost ε. Zvolme γ, aby $\alpha < \gamma < \alpha + \frac{\varepsilon}{d}$, $\gamma < 1$. Ukážeme, že to je hledané γ. Skutečně, nechť $z \in G_\gamma$, pak existuje $x \in G$, že $z = x_o + \gamma(x - x_o)$. Položme $y = x_o + \alpha(x - x_o)$, pak $y \in G_\alpha$ a $\|y - z\| = (\gamma - \alpha)\|x - x_o\| \leq (\gamma - \alpha)d < \varepsilon$. Kdyby bylo $z \in E_n - W$, pak by bylo $\|y - z\| \geq \varepsilon$. Proto $z \in W$, čili $G_\gamma \subset W$, $x_o \in G_\gamma \subset W \in S$, tedy podle 2) je $G_\gamma \in S$, $\gamma \in M$, $\alpha < \gamma$. Tím je (d) dokázáno. Proto $M = (0,1\rangle$, tedy $G = G_1 \in S$.

B) nechť G je neomezená. Pak podle věty 1.2.4. existují omezené otevřené hvězdicovité množiny G_n, všechny se středem x_o a silně lokálně souvislé, že $G_n \subset G_{n+1}$ a $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Důkaz rozdělíme na dvě části:

B.1) pro každé n je $G_n \in S$

B.2) $G \in S$

B.1) nechť je dáno přirozené číslo n. Položme

$$S_n = \{V \in S;\ V \subset G_n\}.$$

Pak S_n je systém otevřených souvislých podmnožin G_n. Ukážeme, že S_n má vlastnosti 1)-4):

1) zvolme $V \in S$. Pak $x_o \in V \cap G_n$ a tedy existuje $r > 0$, že $K(x_o,r) \subset V \cap G_n$. Potom $K(x_o,r)$ je otevřená souvislá množina, $x_o \in K(x_o,r) \subset V \in S$, tj. $K(x_o,r) \in S$. Kromě toho je $K(x_o,r) \subset G_n$, takže $K(x_o,r) \in S_n$. Dokázali jsme, že $S_n \neq \emptyset$.

2) je $x_o \in \bigcap_{V \in S_n} V$, přičemž x_o je středem G_n. Je-li U otevřená souvislá množina, $x_o \in U \subset V \in S_n$, pak $V \in S$, tj. $U \in S$, $U \subset V \subset G_n$, tedy $U \in S_n$.

3) nechť $R \subset S_n \subset S$ a pro libovolná $V_1, V_2 \in R$ je $V_1 \cap V_2$ sou-

visslá. Pak $\bigcup_{V\in R} V \in S$; přitom pro $V\in R\subset S_n$ je $V\subset G_n$, tj. $\bigcup_{V\in R} V\subset$ $\subset G_n$ a tedy $\bigcup_{V\in R} V\in S_n$.

4) nechť množina $V\in S_n$ je silně lokálně souvislá v bodě $a\in\mathcal{H}(V)\cap G_n$. Pak $V\in S$, $a\in\mathcal{H}(V)\cap G$, takže existuje okolí W bodu a, že $V\cup W\in S$. Protože $a\in G_n$, existuje otevřené $\underbrace{\text{okolí}}_{\text{souvislé}}$ U bodu a, že $U\subset W\cap G_n$. Potom $V\cap U\neq\emptyset$, tedy $V\cup U$ je otevřená souvislá, $x_o\in V\subset V\cup U\subset V\cup W\in S$, tj. $V\cup U\in S$, $V\subset G_n$, $U\subset G_n$, proto $V\cup U\subset G_n$; to znamená, že $V\cup U\in S_n$, cbd.

Podle A) je proto $G_n\in S_n$, tedy i $G_n\in S$.

B.2) nechť $R=\{G_n;\ n=1,2,\ldots\}$. Potom podle B.1) je $R\subset S$ a pro libovolná přirozená n,m je $G_n\cap G_m = G_{\min(n,m)}$, je to tedy souvislá množina, takže podle 3) je $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G\in S$.

Tím je důkaz věty o pokrývání ukončen.

Kapitola 2.

Implicitní funkce v E_n.

V této kapitole podáváme po nezbytné úvodní části v odst. 2.2. definici implicitní funkce a uvádíme známé věty o lokální existenci a jednoznačnosti. V odst. 2.3. a 2.4. jsou uvedeny některé věty o limitě a pokračování implicitní funkce. Existenční větu, dokázanou v odst. 2.5., použijeme v 2.6. k důkazu věty o inverzním zobrazení.

2.1. Úvod

Od tohoto místa až do konce této práce nechť r, s značí přirozená čísla, $r \geq 1$, $s \geq 1$. Prostor E_{r+s} ztotožňujeme s prostorem $E_r \times E_s$, proto zápis $(x,y) \in E_{r+s}$ je ekvivalentní zápisu $x \in E_r$, $y \in E_s$. Nechť $G \subset E_{r+s}$; položme

$$G_r = \{x \in E_r;\ \text{existuje } y \in E_s,\ (x,y) \in G\}$$

$$G_s = \{y \in E_s;\ \text{existuje } x \in E_r,\ (x,y) \in G\}.$$

Dále, jsou-li $a \in E_r$, $b \in E_s$, položme

$$G^{\cdot,b} = \{x \in E_r;\ (x,b) \in G\}$$

$$G^{a,\cdot} = \{y \in E_s;\ (a,y) \in G\}.$$

Nechť funkce F je definována na množině $G \subset E_{r+s}$. Argument funkce F budeme ve shodě s tím, co jsme řekli na začátku tohoto odstavce, psát ve formě (x,y). Nechť $F : G \to E_s$. Potom funkce F indukuje s funkcí $F_i : G \to E_1$, $i = 1,2, \dots, s$, takových, že pro každé $(x,y) \in G$ je

$$F(x,y) = (F_1(x,y), \dots, F_s(x,y)).$$

Nechť funkce $F_i(x,y)$, $i = 1,\dots,s$, mají v bodě (x,y) parciální derivace podle proměnných $y_1, \dots, y_s$. Označme $D_y^F(x,y)$ matici

$$D_y^F(x,y) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{s}$$

a $|D_y^F(x,y)|$ její determinant.

Definice 2.1.1. Nechť $G \subset E_{r+s}$ je otevřená množina. Říkáme, že funkce $F : G \to E_s$ je regulární podle y v bodě $(x_0,y_0) \in G$, jestliže v bodě (x_0,y_0) existují spojité parciální derivace $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i,j = 1, \dots, s$, a $|D_y^F(x_0,y_0)| \neq 0$. Říkáme, že F je regulární podle y v G, jestliže je regulární podle y v každém bodě množiny G.

2.2. Jednoznačnost a lokální existence implicitní funkce

Definice 2.2.1. Nechť G je neprázdná otevřená množina v E_{r+s}, $F : G \to E_s$. Řekneme, že funkce $f : M \to E_s$ je implicitní funkce k funkci F na množině M, jestliže $M \subset G_r$, f je spojitá v M, pro každé $x \in M$ je $(x,f(x)) \in G$ a $F(x,f(x)) = 0$.

O lokální existenci implicitní funkce platí známá věta:

Věta 2.2.1. Nechť $F : G \to E_s$, $G \subset E_{r+s}$, je regulární podle y v bodě (x_0,y_0), je spojitá v jistém okolí bodu (x_0,y_0) a $F(x_0,y_0) = 0$. Potom existuje okolí U bodu x_0 v G_r, na němž existuje právě jedna implicitní funkce f k funkci F, pro niž platí $f(x_0) = y_0$.

Poznámka. Podle naší definice je implicitní funkce spojitá. Proto z naší formulace věty o lokální existenci nevyplývá, že na uvedeném okolí U nemůže existovat navíc ještě nějaká nespojitá funkce g, splňující vztah $F(x,g(x)) = 0$ pro každé $x \in U$. Abychom tuto otázku vyjasnili, uvedeme větu o lokální existenci ještě v jiné formě.

Věta 2.2.2. Za předpokladů věty 2.2.1. existuje okolí V bodu (x_o, y_o) a okolí U bodu x_o tak, že ke každému $x \in U$ existuje právě jedno y takové, že $(x,y) \in V$ a $F(x,y) = 0$.

Jednoznačnost implicitní funkce je dána následující větou:

Věta 2.2.3. Nechť $F : G \to E_s$, $G \subset E_{r+s}$, je spojitá a regulární podle y v G. Nechť na souvislé množině $M \subset G_r$ existují k funkci F implicitní funkce f, g. Existuje-li $x_o \in M$, že $f(x_o) = g(x_o)$, pak $f = g$ v M.

Důkaz. Položme $N = \{x \in M;\ f(x) = g(x)\}$. Pak $N \neq \emptyset$, neboť $x_o \in N$. N je uzavřená v M: je-li $x_n \to x$, $x_n \in N$, $x \in M$, pak ze spojitosti f, g plyne, že $f(x_n) \to f(x)$, $g(x_n) \to g(x)$, avšak $f(x_n) = g(x_n)$ pro všechna n, tedy $f(x) = g(x)$, $x \in N$. N je otevřená v M: nechť $x_1 \in N$, tj. $f(x_1) = g(x_1)$, $F(x_1, f(x_1)) = 0$ a nechť U resp. V jsou okolí bodů x_1 resp. $(x_1, f(x_1))$, zaručená větou 2.2.2. Protože f, g jsou spojité v bodě x_1 a $f(x_1) = g(x_1)$, lze U zvolit tak, aby pro $x \in U \cap M$ bylo $(x, f(x)) \in V$, $(x, g(x)) \in V$. Potom $F(x, f(x)) = F(x, g(x)) = 0$, takže podle volby U, V je $f(x) = g(x)$ pro $x \in U \cap M$, tj. $U \cap M \subset N$. Tedy N je otevřená v M. Spolu s dříve dokázanou neprázdností N a uzavřeností v M plyne odtud vzhledem k souvislosti M, že $N = M$.

Důkazy vět 2.2.1., 2.2.2. jsme neuváděli, neboť jsou uvedeny ve většině učebnic diferenciálního počtu nebo funkcionální analýzy. Důkazy těchto vět pro eukleidovské prostory je možno najít např. v [4], [9], pro Banachovy prostory v [1], [7], [12], [13], [14].

2.3. Limita implicitní funkce

Nechť implicitní funkce f je definována na množině $M \subset G_r$ (viz def. 2.2.1.). V tomto odstavci se budeme zabývat otázkou, za jakých podmínek existuje v bodě $a \in \overline{M} - M$ limita $\lim_{x \to a} f(x) = b$, a přitom $(a,b) \in G$.

Pro snazší formulaci věty 2.3.1. zavedeme pomocný pojem:

Definice 2.3.1. Řekneme, že funkce $F : N \to E_s$, $N \subset E_s$, je lokálně prostá v bodě $b \in N$, jestliže existuje okolí U bodu b takové, že pro každé $x \in U \cap N$, $x \neq b$, je $F(x) \neq F(b)$.

Věta 2.3.1. Nechť funkce $F : G \to E_s$ je spojitá na otevřené množině $G \subset E_{r+s}$ a má na množině $M \subset G_r$ implicitní funkci f. Nechť M je silně lokálně souvislá v bodě $a \in (\overline{M} - M) \cap G_r$ a funkce $\phi(y) = F(a,y)$ je lokálně prostá v každém bodě množiny $G^{a,\cdot}$. Potom limita

(1) $\qquad \lim_{x \to a} f(x) = b \ , \ (a,b) \in G$

existuje právě když existuje posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in M$, $x_n \to a$, $f(x_n) \to c$, $(a,c) \in G$. V takovém případě je pak $c = b$.

Poznámka. Srovnáme-li uvedenou větu s Heineho podmínkou existence limity, vidíme, že v daném případě stačí k existenci limity (1) konvergence pouze jedné posloupnosti $\{f(x_n)\}$; musí ovšem být $(a, \lim_{n \to \infty} f(x_n)) \in G$.

Důkaz. 1) existuje-li $\lim_{x \to a} f(x) = b$, pak pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in M$, $x_n \to a$, je $f(x_n) \to b$.

2) nechť existuje posloupnost $x_n \in M$, $x_n \to a$, $f(x_n) \to c$, $(a,c) \in G$. Položme $L = \{y \in E_s;$ existují $z_n \in M$, $z_n \to a$, $f(z_n) \to y\}$. Pak $c \in L$. Nejprve dokážeme: je-li $d \in L \cap G^{a,\cdot}$, pak $F(a,d) = 0$. Je-li totiž $d \in L$, pak existuje posloupnost $z_n \in M$, $z_n \to a$, $f(z_n) \to d$, tj.

$(z_n, f(z_n)) \to (a,d)$, tj. $0 = F(z_n, f(z_n)) \to F(a,d)$, takže $F(a,d) = 0$. Je $c \in L$, $(a,c) \in G$, takže funkce ϕ je lokálně prostá v bodě c, tj. existuje okolí U bodu c, $U \subset G^{a,\cdot}$, že je-li $y \in U$, $y \neq c$, pak $\phi(y) \neq \phi(c)$, tj. $F(a,y) \neq F(a,c) = 0$. Předpokládejme, že $L \neq \{c\}$. Pak existuje $d \in L$, $d \neq c$, a podle věty 1.2.2 3), bod c není izolovaný v L, takže existuje $y \in U \cap L$, $y \neq c$. Ovšem $y \in L$, takže $F(a,y) = 0$, a to je spor. Proto $L = \{c\}$ a podl věty 1.2.2., 2) je $\lim_{x \to a} f(x) = c$, cbd.

Lemma 2.3.1. Nechť funkce $F : G \to E_s$, $G \subset E_{r+s}$, je regulární podle y v bodě $(a,b) \in G$. Potom funkce $\phi(y) = F(a,y)$ je lokálně prostá v bodě b.

Důkaz. Položme $A = D_y^F(a,b)$. Protože $\det(A) \neq 0$, existuje $M > 0$ že pro každé $y \in E_s$ je $\|Ay - Ab\| \geq M\|y - b\|$.* Definujeme-li na G funkci H předpisem $H(x,y) = F(x,y) - Ay$, pak H má v bodě (a,b) spojité parciální derivace $\frac{\partial H_i}{\partial y_j}$, $\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(a,b) = 0$, $i,j = 1, \dots, s$ takže existuje okolí U bodu (a,b), že pro každé $(a,y) \in U$ je $\|H(a,y) - H(a,b)\| \leq \frac{M}{2}\|y - b\|$. Nechť $(a,y) \in U$, $F(a,y) = F(a,b)$. Pak $\|H(a,y) - H(a,b)\| = \|Ay - Ab\| \geq M\|y - b\|$. Současně je však $\|H(a,y) - H(a,b)\| \leq \frac{M}{2}\|y - b\|$, proto musí být $y = b$, cbd.

Definice 2.3.2. Řekneme, že funkce $F : G \to E_s$, $G \subset E_{r+s}$, splňuje v bodě $a \in G_r$ podmínku (H_o), jestliže

(a) ke každému $(a,z) \in \partial(G)$ existuje okolí U bodu (a,z) takové, že pro všechna $(x,y) \in U \cap G$ je $F(x,y) \neq 0$,

(b) existuje okolí V bodu a a číslo $K > 0$ tak, že pro všechna $(x,y) \in G$, $x \in V$, $\|y\| > K$, je $F(x,y) \neq 0$.

Řekneme, že funkce F splňuje v G podmínku (H_o), jestliže splňuje podmínku (H_o) v každém bodě $a \in G_r$.

---

* míníme normu matice, indukovanou eukleidovskou normou vektoru

Poznámka. Podmínka (b) je vždy splněna, jakmile G_s je omezená.

Věta 2.3.2. Nechť funkce $F : G \to E_s$ je spojitá na otevřené množině $G \subset E_{r+s}$ a má na množině $M \subset G_r$ implicitní funkci f. Nechť M je silně lokálně souvislá v bodě $a \in (\bar{M} - M) \cap G_r$ a nechť F splňuje podmínku (H_o) v bodě a a je regulární podle y v každé bodě množiny $G^{a,\cdot}$. Potom existuje

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad (a,b) \in G.$$

Důkaz. Podle lemmatu 2.3.1. je funkce $\phi(y) = F(a,y)$ lokálně prostá v každém bodě množiny $G^{a,\cdot}$; to znamená, že jsou splněny předpoklady věty 2.3.1. Zvolme posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in M$, $x_n \to a$. Podle podmínky (H_o), (b), existuje okolí V bodu a a číslo $K > 0$, tak, že pro $x \in V \cap M$ je $\|f(x)\| \leq K$. Proto z posloupnosti $\{f(x_n)\}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost $\{f(x_{n_k})\}$, $f(x_{n_k}) \to b$, $\|b\| \leq K$. Protože $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to (a,b)$, $F(x_{n_k}, f(x_{n_k})) = 0$ pro každé n_k, nemůže podle podmínky (H_o), (a) nastat případ $(a,b) \in \in \mathcal{H}(G)$. Proto $(a,b) \in G$, takže podle věty 2.3.1. je $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

2.4. Pokračování implicitní funkce

V tomto odstavci zavedeme pojem pokračování implicitní funkce a uvedeme některé postačující podmínky jeho existence.

Definice 2.4.1. Nechť funkce $F : G \to E_s$, $G \subset E_{r+s}$, má na množině $M \subset G_r$ implicitní funkci f. Nechť $a \in \mathcal{H}(M) \cap G_r$. Řekneme, že implicitní funkce f má pokračování v bodě a, jestliže existuje okol U bodu a takové, že F má na množině $M \cup U$ implicitní funkci g, která je rozšířením f, tj. $g|_M = f$.

<u>Věta 2.4.1.</u> Nechť funkce $F : G \to E_s$ je spojitá na otevřené množině $G \subset E_{r+s}$ a má na otevřené množině $M \subset G_r$ implicitní funkci f. Nechť M je silně lokálně souvislá v bodě $a \in \mathcal{H}(M) \cap G_r$ a F je regulární podle y v každém bodě množiny $G^{a,\cdot}$. Potom f má v bodě a pokračování právě když existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, (a,b)

<u>Důkaz.</u> 1) nechť f má v bodě a pokračování, tj. existuje okolí U bodu a a implicitní funkce g na $M \cup U$, $g|_M = f$. Funkce g je spojitá v bodě a, takže $g(a) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, tím spíše $g(a) = \lim\limits_{x \in M} g$ Protože $g|_M = f$, je $g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, přitom $(a,g(a)) \in G$, cbd.

2) nechť existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $(a,b) \in G$. Nechť $x_n \in M$, $x_n \to a$ pak $f(x_n) \to b$, $(x_n, f(x_n)) \to (a,b)$, $0 = F(x_n, f(x_n)) \to F(a,b)$, tedy $F(a,b) = 0$. Potom podle věty 2.2.1. existuje na jistém okolí V bodu $a \in G_r$ implicitní funkce h_1 taková, že $h_1(a) = b$. Zvolme okolí U bodu a, aby $U \subset V$, $U \cap M$ souvislá. Položme $h = h_1|_U$. Dodefinujme dále funkci f v bodě a předpisem $f(a) = b$, pak f je implicitní funkce na $M \cup \{a\}$. Přitom je $(M \cup \{a\}) \cap U = (M \cap U) \cup$ $\cup (\{a\} \cap U) = (M \cap U) \cup \{a\}$. Protože $M \cap U$ je souvislá, $a \in \mathcal{H}(M \cap U)$, je množina $(M \cap U) \cup \{a\}$ souvislá. Přitom $f(a) = h(a) = b$, tedy podle věty 2.2.3. je $f(x) = h(x)$ pro $x \in U \cap M$. Nechť W je otevřen okolí bodu a, $W \subset U$. Definujme nyní funkci g na množině $M \cup W$ tak to:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in M \\ h(x) & \text{pro } x \in W - (W \cap M) \end{cases}$$

(což je totéž, jako $g(x) = f(x)$ pro $x \in M$, $g(x) = h(x)$ pro $x \in W$). Potom g je spojitá v $M \cup W$ a pro každé $x \in M \cup W$ je $F(x, g(x)) = 0$, tj. g je implicitní funkce k F na $M \cup W$. Přitom $g|_M = f$, takže f má v bodě a pokračování.

Věta 2.4.2. Nechť funkce $F : G \to E_s$ je spojitá na otevřené množině $G \subset E_{r+s}$ a má na otevřené množině $M \subset G_r$ implicitní funkci f. Nechť M je silně lokálně souvislá v bodě $a \in \partial(M) \cap G_r$ a nechť F splňuje v bodě a podmínku (H_0) a je regulární podle y v každém bodě množiny $G^{a,\circ}$. Potom f má pokračování v bodě a.

Důkaz. Podle věty 2.3.2. existuje $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $(a,b) \in G$. Pak podle věty 2.4.1. má f v bodě a pokračování.

2.5. Existenční věta

V tomto odstavci je uvedena "globální" věta o existenci implicitní funkce. V důkazu se používají věty 1.4.1., 2.2.1., 2.2.3., 2.4.2.

Věta 2.5.1. Nechť funkce $F : G \to E_s$ je spojitá a regulární podle y v otevřené množině $G \subset E_{r+s}$ a splňuje v G podmínku (H_0). Nechť G_r je hvězdicovitá silně lokálně souvislá množina a existuje bod $(x_0, y_0) \in G$, $F(x_0, y_0) = 0$ a x_0 je středem množiny G_r. Potom na množině G_r existuje k funkci F právě jedna implicitní funkce f, pro kterou $f(x_0) = y_0$.

Důkaz. Položme

$S = \{V$; V otevřená souvislá množina, $x_0 \in V \subset G_r$ a na množině V existuje implicitní funkce f_V k funkci F, pro kterou platí $f_V(x_0) = y_0\}$.

Ukážeme, že systém S splňuje předpoklady 1)-4) věty 1.4.1.

1) podle věty 2.2.1. je $S \neq \emptyset$.

2) podle definice je $x_0 \in \bigcap_{V \in S} V$; je-li $x_0 \in U \subset V \in S$, U otevřená souvislá, pak, položíme-li $f_U = f_V|_U$, je f_U implicitní funkce k F na U, $f_U(x_0) = f_V(x_0) = y_0$, takže $U \in S$.

3) nechť $\emptyset \neq R \subset S$ a pro každé $V_1, V_2 \in R$ je $V_1 \cap V_2$ souvislá. Pak $W = \bigcup_{V \in R} V$ je otevřená souvislá množina, $x_0 \in W \subset G_r$. Nechť $V_1, V_2 \in R$. Vzhledem k tomu, že množina $V_1 \cap V_2$ je souvislá a obsahuje bod x_0, pro který $f_{V_1}(x_0) = f_{V_2}(x_0) = y_0$, je podle věty 2.2.3. $f_{V_1}(x) = f_{V_2}(x)$ pro každé $x \in V_1 \cap V_2$. Proto lze na množině W korektně definovat funkci f_W předpisem

$$f_W(x) = f_V(x) \ , \ x \in V \in R.$$

Pak f_W je implicitní funkce k F na W, $f_W(x_0) = y_0$, $W \in S$.

4) nechť množina $V \in S$ je silně lokálně souvislá v bodě $a \in \mathcal{H}(V) \cap G_r$. Pak implicitní funkce f_V má podle věty 2.4.2. pokračování v bodě a, tj. existuje okolí W bodu a takové, že na $V \cup W$ existuje implicitní funkce h k F. Zvolme otevřené souvislé okolí U bodu a, $U \subset W$ a položme $f_{V \cup U} = h|_{V \cup U}$. Potom $V \cup U$ je otevřená souvislá množina, $f_{V \cup U}$ je implicitní funkce k F na $U \cup V$, $f_{V \cup U}(x_0) = h(x_0) = y_0$, tedy $V \cup U \in S$, cbd.

Podle věty 1.4.1. je $G_r \in S$, tedy na množině G_r existuje k funkci F implicitní funkce $f_{G_r} = f$, pro kterou $f(x_0) = y_0$. Jednoznačnost této funkce vyplývá z věty 2.2.3., neboť hvězdicovitá množina G_r je souvislá.

<u>Poznámka.</u> Jak jsme podotkli výše, je každá otevřená konvexní množina hvězdicovitá a silně lokálně souvislá. Věta 2.5.1. platí tedy speciálně v případě, že množina G je konvexní. V tomto speciálním případě by byl důkaz existenční věty poněkud jednodušší, protože pro důkaz věty o pokrývání pro konvexní množiny není zapotřebí věty o iredundantním pokrytí.

2.6. Inverzní zobrazení

Definice 2.6.1. Řekneme, že funkce $\phi : G \to E_s$ splňuje na množině $G \subset E_s$ podmínku (H), jestliže

(a) ke každému $x \in \phi(G)$, $z \in \partial(G)$ existuje okolí V bodu x a okolí U bodu z taková, že pro každé $y \in G \cap U$ je $\phi(y) \notin V$

(b) ke každému $x \in \phi(G)$ existuje okolí V bodu x a číslo $K > 0$ tak, že pro všechna $y \in G$, $\|y\| > K$, je $\phi(y) \notin V$.

Pozn. V definici 2.1.1. jsme zavedli pojem funkce regulární podle y. Je-li r = 0, tj. je-li y přímo argumentem funkce F, budeme říkat, že F je regulární.

Věta 2.6.1. Nechť zobrazení ϕ je prosté, spojité, regulární a splňující podmínku (H) na otevřené množině $G \subset E_s$, kterou zobrazuje na otevřenou hvězdicovitou silně lokálně souvislou množinu $\phi(G) \subset E_s$. Potom inverzní zobrazení ϕ_{-1} je spojité.

Důkaz. Zvolme střed x_0 množiny $\phi(G)$ a nechť $y_0 = \phi_{-1}(x_0)$. Funkce $F(x,y) = \phi(y) - x : \phi(G) \times G \to E_s$ splňuje předpoklady věty 2.5.1., takže má na $\phi(G)$ implicitní funkci g. Přitom pro každé $x \in \phi(G)$ je $0 = F(x, g(x)) = \phi(g(x)) - x$, tj. $\phi(g(x)) = x$, takže $g = \phi_{-1}$. Implicitní funkce je podle definice spojitá, takže zobrazení ϕ_{-1} je spojité.

Kapitola 3.

Přibližná metoda výpočtu implicitní funkce

Důkaz existence "globální" implicitní funkce, který jsme uvedli v odst. 2.5., byl zcela nekonstruktivní. V této krátké kapitole uvedeme metodu konstrukce posloupnosti funkcí, které konvergují ke "globální" implicitní funkci. Při důkazu konvergence je nutno existenci implicitní funkce předpokládat, nepůjde tedy o nové odvození existenční věty. Největší potíže způsobuje okolnost, že jednotlivé iterace mohou vybočit mimo původní množinu G. Jak je uvedeno v 3.1., lze tomu snadno zabránit v případě, že $s = 1$. V případě $s > 1$ je nutno dodat mnohé doplňující předpoklady, které metodu značně komplikují a proto se zde tímto případem nebudeme zabývat. Vzorec, ke kterému dospějeme v případě $s = 1$, je dosti analogický vzorci pro Newtonovu metodu. Vyskytuje se v něm funkce H, která musí splňovat dvě vlastnosti (a), (b) a jinak může být libovolná. Vhodnou volbou funkce H můžeme v jednotlivých konkrétních případech urychlit konvergenci.

3.1. Případ $s = 1$

Nechť $G \subset E_{r+1}$ je otevřená konvexní množina a funkce $F : G \to E_1$ má v G_r implicitní funkci f. Pokusíme se zkonstruovat posloupnost $\{f_n\}$ funkcí, spojitých na G_r a konvergujících k f. Přesněji řečeno, budeme hledat funkci $D(x,y)$, definovanou na G, tak, aby, vybereme-li libovolně spojitou funkci f_0 s vlastností $(x, f_0(x)) \in G$ pro každé $x \in G_r$ a definujeme-li posloupnost $\{f_n\}$

rekurentně předpisem

$$f_{n+1}(x) = D(x, f_n(x)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

platilo:

(1') je-li $(x, f_n(x)) \in G$, pak $(x, D(x, f_n(x))) \in G$ ~~a je-li f_n spojitá v G_r, je f_{n+1} spojitá v G_r~~

(2') posloupnost $\{f_n(x)\}$ je konvergentní pro každé $x \in G_r$

(3') limitou posloupnosti $\{f_n\}$ je implicitní funkce f.

To bude splněno, bude-li mít D tyto vlastnosti:

(1) pro každé $(x,y) \in G$ je $(x, D(x,y)) \in G$

(2) funkce D má v G parciální derivaci $D'_y = \frac{\partial D}{\partial y}$ a existuje funkce $q : G_r \to \langle 0,1)$ tak, že pro každé $(x,y) \in G$ je $0 \leq D'_y \leq q(x) < 1$

(3) pro každé $x \in G_r$ je funkce $D(x,.)$ spojitá a $y = D(x,y)$ právě když $F(x,y) = 0$

Věta 3.1.1. Nechť $F : G \to E_1$ je spojitá v otevřené konvexní množině $G \subset E_{r+1}$ a má v každém bodě G nenulovou parciální derivaci F'_y. Nechť F má na G_r implicitní funkci f. Potom na množině G existuje funkce D s vlastnostmi (1)-(3) právě když na G existuje funkce H s těmito vlastnostmi:

(a) H je nenulová v G a pro každé $x \in G_r$ je $H(x,.)$ spojitá

(b) funkce FH má v každém bodě množiny G derivaci $(FH)'_y$ a existuje funkce $q : G_r \to \langle 0,1)$ taková, že pro každé $(x,y) \in G$ je

$$0 < 1 - q(x) \leq (FH)'_y(x,y) \leq 1$$

Existuje-li funkce H s vlastnostmi (a), (b), pak funkce

$$(^x) \qquad D(x,y) = y - F(x,y)H(x,y)$$

má vlastnosti (1)-(3).

Důkaz. A) Nechť H splňuje (a), (b) a D je definována vzorcem $(^x)$ Dokážeme, že D splňuje (3)-(1).

(3) $y = D(x,y)$ právě když $F(x,y)H(x,y) = 0$. Protože H je nenulo-

vá v G, je $y = D(x,y)$ právě když $F(x,y) = 0$.

(2) protože $1 - q(x) \leq (FH)'_y \leq 1$, je

$$D'_y = 1 - (FH)'_y \in \langle 0, q(x) \rangle \subset \langle 0, 1 \rangle.$$

(1) nechť $(x,y) \in G_r$. Je $F(x,f(x)) = 0$, tedy $D(x,f(x)) = f(x)$, proto $D(x,y) - D(x,f(x)) = (y - f(x))D'_y(x,c)$, $c \in \overline{y,f(x)}$. Tedy $D(x,y) = f(x) + (y - f(x))D'_y(x,c) \in \overline{y,f(x)}$, to znamená, že $(x,D(x,y)) \in G$.

B) nechť D má vlastnosti (1) - (3). Definujme funkci H:

$$H(x,y) = \frac{y - D(x,y)}{F(x,y)} \quad \text{pro } y \neq f(x)$$

$$H(x,f(x)) = \frac{1 - D'_y(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$$

Potom H je nenulová. Spojitost $H(x,.)$ v každém bodě $y \neq f(x)$ je zřejmá. Dále je

$$\lim_{y \to f(x)} H(x,y) = \lim_{y \to f(x)} \frac{y - D(x,y) - (f(x) - D(x,f(x)))}{y - f(x)} \cdot \frac{y - f(x)}{F(x,y) - F(x,f(x))}$$

$$= \frac{1 - D'_y(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}, \text{ cbd.}$$

Přitom pro každé $(x,y) \in G$ je $D(x,y) = y - F(x,y)H(x,y)$.

<u>Věta 3.1.2.</u> Nechť $F : G \to E_1$ je spojitá v otevřené ~~množině~~ konvexní $G \subset E_{r+1}$ a splňuje v G podmínku (H_o). Nechť F má v G spojitou parciální derivaci F'_y a je $\sup_G F'_y \leq s < +\infty$, $-\infty < i \leq \inf_G F'_y$, $is > 0$. Nechť q, m jsou reálná čísla, pro která platí

1) $1 - \frac{i}{s} \leq q < 1$, $\frac{1 - q}{i} \leq m \leq \frac{1}{s}$ pro $i > 0$

2) $1 - \frac{s}{i} \leq q < 1$, $\frac{1}{i} \leq m \leq \frac{1 - q}{s}$ pro $i < 0$.

Nechť existuje $(x_o,y_o) \in G$, $F(x_o,y_o) = 0$. Nechť $f_o : G_r \to E_1$ je spojitá funkce, $f_o(x_o) = y_o$ a pro každé $x \in G_r$ je $(x,f_o(x)) \in G$. Definujme posloupnost $\{f_n\}$ rekurentním vztahem

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - mF(x, f_n(x)), \quad n = 0, 1, \dots .$$

Potom $\{f_n\}$ je v G_r lokálně stejnoměrně konvergentní k funkci f, která je implicitní funkcí k F na G_r a $f(x_o) = y_o$. Pro každé $x \in G_r$ je

$$(^x) \qquad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{|mF(x, f_o(x))|}{1 - q} q^n .$$

<u>Důkaz.</u> Položme $D(x,y) = y - mF(x,y)$. Snadným výpočtem zjistíme, že v obou případech 1), 2) je $0 \leq \frac{\partial D}{\partial y} \leq q < 1$ v G. Protože is>0, je $F'_y \neq 0$ a podle věty 2.5.1. má F na G_r implicitní funkci f. Potom podle věty 3.1.1. má D vlastnosti (1)-(3), speciálně (viz bod (1) důkazu věty 3.1.1.) je $D(x,y) \in \overline{y, f(x)}$, takže pro každé n je $f_{n+1}(x) \in \overline{f_n(x), f(x)} \subset \overline{f_o(x), f(x)}$. Podle Banachovy věty je posloupnost $\{f_n\}$ v každém bodě konvergentní, položme $g(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$, a dále platí

$$(^{xx}) \qquad |g(x) - f_n(x)| \leq \frac{|mF(x, f_o(x))|}{1 - q} q^n$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ ve vztahu $f_{n+1}(x) = f_n(x) - mF(x, f_n(x))$ dostáváme pro každé x, $F(x, g(x)) = 0$; přitom z $(^{xx})$ plyne, že posloupnost $\{f_n\}$ je lokálně stejnoměrně konvergentní, tedy g je spojitá, $g(x_o) = y_o$, tudíž vzhledem k jednoznačnosti implicitní funkce je $g = f$. Tím přechází nerovnost $(^{xx})$ v $(^x)$.

Literatura

[1] Dieudonné, J., Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York 1960

[2] Ehrmann, H., On implicit function theorems and the existence of solutions of non-linaer equations, l'Ensig. Math. IX(1963), 129-176

[3] Engelking, R., Zarys topologii ogólnej, Warszawa, PWN 1965

[4] Fichtĕngolc, G.M., Kurs differencialnogo i intĕgralnogo isčislenija I, Fizmatgiz, Moskva 1962

[5] Fichtĕngolc, G.M., Kurs differencialnogo i intĕgralnogo isčislenija II, Fizmatgiz, Moskva 1959

[6] Gelman, A.E., Teoremy o nejavnoj abstraktnoj analitičeskoj funkcii, DAN SSSR, 28, t. 132, No. 3(1960), 501-503

[7] Hildebrandt, T.H., Graves, L.M., Implicit functions and their differencials in general analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 29(1927), 127 - 153

[8] Jarník, V., Diferenciální počet I, NČSAV, Praha 1955

[9] Jarník, V., Diferenciální počet II, NČSAV, Praha 1956

[10] Jerugin, N.P., Nejavnyje funkcii, Izd. Leningr. Univ., Leningrad 1956

[11] Jerugin, N.P., K teorii nejavnych funkcij, DAN BSSR 7(1963), t. 7, No. 1, 5-8

[12] Kantorovič, L.V., Akilov, G.P., Funkcionalnyj analiz v normirovannych prostranstvach, Fizmatgiz, Moskva 1959

[13] Lamson, K.W., A general implicity function theorem with an application to problems of relative minima, Amer. Jour. Math. 42(1920), 243-256

[14] Ljusternik, L.A., Sobolev, V.I., Elementy funkcionalnogo analiza, Nauka, Moskva 1965

[15] Lozinskij, S.M., Obratnyje funkcii, nejavnyje funkcii i rešenije uravnenij, Vest. Leningr. Univ. 7(1957), 131-142

[16] Ostrowski, A.M., Simultaneous systems of equations, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 29(1953), 29-34

[17] Vajnberg, M.M., Trenogin, V.A., K teorii nejavnych funkcij, UMN 17, vyp. 5(1962), 185-186

[18] Vajnberg, M.M., Trenogin, V.A., K teorii sistem nejavnych funkcij, Uč. zap. mosk. obl. ped. in-ta 87, vyp. 8(1964)

[19] Vajnberg, M.M., Trenogin, V.A., Teorija vetvlenija rešenij nelinejnych uravnenij, Nauka, Moskva 1969

[20] Zubov, V.I., K voprosu suščestvovanija i približennogo rešenija nejavnych funkcij, Vest. Leningr. Univ. 19(1956), ser. mat., mech. i astr., 48-54

Obsah