Sur le problème des nombres naturels

L. RIEGER (Praha)

En commençant, je voudrais attirer votre attention sur l'intéressante conférence de A. S. Ésénine-Volpine (voir ce volume), qui présente un point de vue très proche de celui que je vais exposer ici. A. S. Ésénine-Volpine (comme moi-même) a essayé d'abandonner la conviction de l'unicité intuitive de la suite des nombres naturels au sens absolu — et d'en tirer conséquences restrictives et critiques quant à la métamathématique (même quant à celle dite constructiviste) de la théorie des nombres et de la théorie des ensembles. Bien que nos points de vue diffèrent là où il s'agit des buts premiers et de la réalisation de l'idée principale, il est remarquable de noter leur source commune qui me semble être symptomatique, car il n'y a pas eu de communication entre nous deux.

Dans ma conférence, je vais discuter la question qui pourrait être exprimée, tout simplement comme suit:

La situation actuelle des fondements de la théorie des nombres pourrait-elle être considérée comme analogue à celle de la géométrie au commencement du siècle passé?

Naturellement, cette question n'est pas tout à fait nouvelle. Elle a été touchée déjà en rapport avec les résultats célèbres de Gödel et de Skolem concernant les sentences formellement indécidables et la non-catégoricité de l'arithmétique péanienne formalisée. Elle découle de nouveau p. ex. des considérations récentes de J. Kémény, présentées au Congrès d'Edinbourg (1958), qui concernent la possibilité de satisfaire (en un certain sens faible) la négation de l'hypothèse de Goldbach par un modèle non-standard de l'arithmétique péanienne.

Mais, la réponse à notre question, acceptée jusqu'à présent par la grande majorité des mathématiciens, est décidément négative. L'opinion régnante — n'importe si elle est constructiviste ou non — nous dit que la méthode axiomatique au sens original de Hilbert, développée comme tout à fait adéquate aux géométries, n'est pas capable de jouer un rôle analogue dans la théorie des nombres. (Voir p. ex. le compte-rendu bien connu de A. Mostowski, présenté au Congrès des mathématiciens polonais à Varsovie en 1953, sur l'état actuel des fondements des mathématiques.) Cette opinion générale résulte d'une part du fait que le développement intuitif naturel de la théorie des nombres ne semble pas encore forcer ses spécialistes aux recherches (axiomatiques) sur les fondements de leur discipline — et de l'autre côté, elle découle des résultats classiques mentionnés de Gödel et de Skolem et complétés récemment par les considérations sur l'absence d'une axiomatique élémentaire finie pour l'arithmétique péanienne de C. Ryll-Nardzewski, A. Mostowski et d'autres.

Donc, en général, on admet la notion dite absolue des nombres naturels. On écrit I, II, III, ..., où les trois points („etc.") désignent le procès „d'adjonction successive à droite" des exemplaires d'un seul objet „sans cesse" reproduit. Autrement dit, on adopte le point de vue de Kronecker, si l'on veut, avec la différence peu mathématique qu'on peut imaginer une machine ou un procédé physique produisant la structure des nombres naturels absolus — et on n'a pas besoin du bon Dieu pour ce but. Bien entendu, on peut discuter s'il est admissible d'imaginer — dans une théorie mathématique — tout le résultat de ce procédé fondamental comme actuellement subsistant ou non, c'est-à-dire, on peut être en désaccord quant au sens propre et à la démonstration rigoureuse de la proposition „il existe un nombre naturel tel que...". Mais, dans tous les cas (constructivistes ou non), on admet cette notion absolue des nombres naturels au moins dans les considérations métamathématiques; on en a besoin déjà pour pouvoir formuler exactement l'arithmétique péanienne elle-même.

Je n'ai pas le temps d'insister ici sur une critique, plus poétique que mathématique, de la notion absolue des nombres naturels. Je voudrais seulement remarquer que — si nous voulons éviter le psychologisme et l'anthropomorphisme dans la notion des nombres absolus — nous devons néanmoins y laisser la notion de temps orienté comme essentiellement contenue dans la notion d'un procédé quelconque produisant des nombres naturels. Donc, nous sommes nécessairement amenés à la notion de temps dans la physique.

En effet, la définition physique du temps se réduit à un procédé de reproduction successive et observable du même

événement, p. ex. du passage d'une étoile chronométrique ou d'une constellation atomique. Mais, il est clair que cette manière de préciser la notion intuitive absolue des nombres naturels est bien problématique; peut-être, arriverait-on à la conclusion tout à fait opposée, c'est-à-dire, la conviction de l'unicité structurale du procédé fondamental I, II, III, ... pourrait être considérée comme un certain préjudice intuitif concernant le temps orienté, qui est analogue au préjudice aprioriste de la structure euclidienne, la seule possible, de l'espace. Cette situation ne changerait pas en vue d'un certain privilège historique et heuristique de la géométrie euclidienne.

Mais, revenons aux arguments plus mathématiques qu'on peut donner en faveur de la possibilité d'une réponse positive à notre question principale relative à l'analogie existaut entre les fondements de la géométrie et ceux de la théorie des nombres. Donc, j'ose formuler un point de vue strictement axiomatique dans la théorie des nombres qui est opposé à celui que l'on accepte en général aujourd'hui. Puis, je vais examiner la possibilité de satisfaire aux exigeances données en tenant compte de certains de mes résultats purement mathématiques — et enfin, je vais signaler deux problèmes difficiles qui restent à résoudre pour que notre point de vue soit vraiment justifié (quant à la mathématique).

Quelles sont les suppositions programmatiques de notre point de vue quant aux fondements de la théorie des nombres?

Premièrement, on doit considérer la théorie des nombres basale seulement comme une théorie axiomatique élémentaire, c'est-à-dire basée sur la logique des prédicats du premier type.

Deuxièmement, on ne peut supposer aucune notion de nombre naturel comme donnée, même pas dans les considérations métamathématiques; c'est-à-dire, non seulement les symboles des relations primitives de la théorie des nombres, les constantes individuelles primitives et les variables doivent tous être montrés (d'une manière pratiquement effective) — mais il doit en être de même aussi pour les axiomes eux-mêmes.

Troisièmement, toute considération métamathématique (concernant notre théorie élémentaire des nombres formalisée) doit être relativisée par une constante numérique comme une borne supérieure pour le nombre de symboles utilisés et celui des pas des récursions métamathématiques qui seront considérés.

Vous voyez que ce sont des exigences finitistes — quant à la métamathématique de la théorie des nombres — aussi fortes qu'on peut imaginer; en effet, on évite de cette façon l'usage essentiel et systématique de la métamathématique du tout (ce qui, naturellement, n'est pas vrai du point de vue heuristique). D'autre part, on peut se servir sans scrupules, en développant une telle théorie des nombres, de la logique ordinaire dite classique, naturellement en gardant la possibilité pratique du contrôle des démonstrations (très longues et compliquées) par le calcul formel des prédicats.

Mais quel pourrait être un tel système axiomatique pour la théorie des nombres en vue du fait qu'il n'existe pas de système fini élémentaire de l'arithmétique péanienne?

D'une part, nous voyons que la théorie basale des nombres cherchée ne peut pas se borner aux seuls nombres naturels et qu'il est convenable de considérér aussi des nombres qui joueraient (dans la théorie des nombres basale) le rôle des points à l'infini de la géométrie, d'une façon assez naturelle relative aux nombres naturels. C'est-à-dire, il ne s'agira plus d'une „reine Zahlentheorie", mais — peut-être — d'une partie convenable de la théorie algébrique des nombres qui serait „aussi peu infinitiste que possible".

D'autre part, depuis déjà plus de vingt ans, on connaît au moins un système élémentaire fini d'axiomes „pas trop infinitistes" et assez fortes permettant de développer une théorie des nombres peut-être plus riche que n'est la „reine Zahlentheorie". En effet, c'est la théorie axiomatique des ensembles finis p. ex. au sens de Bernays-Gödel, c'est-à-dire le système Σ' de 19 axiomes (utilisé par Gödel dans sa fameuse démonstration de la non-contradiction de l'hypothèse du continu généralisée) où l'on a remplacé l'axiome de l'infini C1 par son contraire, à savoir, par l'axiome du fini.

Donc, une certaine possibilité de réaliser nos exigences strictement axiomatiques pour fonder la théorie basale des nombres subsiste: Du point de vue de nos trois exigences logiques données, ceci sera fait si nous considérons les nombres naturels comme les nombres ordinaux de la théorie axiomatique des ensembles finis (et, bien entendu des classes au plus dénombrables). Mais, du point de vue mathématique, cette possibilité semble être peu naturelle et peu élégante, entre autres, parce que la relation primitive binaire „être élément" — et les classes en général sont des objets assez étrangers à la théorie des nombres, même s'il s'agissait de la théorie algébrique. Notamment, on pourrait bien ajouter une *quatrième exigence*, naturelle de notre point de vue, pour ce qui concerne le système axiomatique basal de la théorie des nombres: *Pour seules notions primitives du système axiomatique cherché nous devons prendre quelques opérations arithmétiques fondamentales.*

La solution de cette difficulté peut être exprimée d'une façon simple et un peu surprenante:

La *théorie axiomatique des ensembles finis* (et des classes au plus dénombrables) de Bernays-Gödel — n'est qu'une autre *formulation d'une certaine théorie élémentaire axiomatique finie des nombres entiers p-adiques de Hensel* (bien connus et bien importants dans la théorie algébrique des nombres) *pour le cas* $p = 2$ (entiers dyadiques). La dernière théorie est fondée sur 25 axiomes concernant seulement les trois notions primitives suivantes: *l'addition, la multiplication* et *la puissance arithmétique de* 2 pour les entiers dyadiques. (La dernière opération est entendue dans ce sens que l'on prend l'entier non-négatif de la puissance en question.)

Pour pouvoir formuler ce résultat plus précisément, je donne une description globale de la nature et de l'intention de nos axiomes de la théorie proposée des entiers dyadiques. (Pour plus de détails et pour les démonstrations, voir mon article *A contribution to Gödel's axiomatic set theory III*, à paraître dans Czech. Mat. J. 10 (85).)

Le premier groupe d'axiomes exige tout simplement que les entiers dyadiques forment *un anneau commutatif avec un élément-unité, sans diviseurs de zéro et avec* $1+1 \neq 0$.

Le deuxième groupe d'axiomes concerne la puissance arithmétique de 2. Il est partagé en *deux sous-groupes*, à savoir:

Les axiomes du *premier sous-groupe* ont pour but l'introduction de la *propriété d'être non négatif* (au sens bien connu de l'algèbre, ce qu'on écrit $X \geqslant 0$), *au moyen de la puissance de* 2; donc, nous exigeons des propriétés de 2^X telles que la relation $X \geqslant 0$ définie par $2^X \neq 0$ donne les deux sous-semigroupes (additif et multiplicatif) des si dits entiers non négatifs d'un *certain sous-anneau discrètement ordonné et avec une unité*, de tout l'anneau considéré. (Nous désignons les entiers non négatifs dyadiques abstraits par des minuscules, tandis que les entiers dyadiques abstraits quelconques seront désignés par des majuscules; nous écrivons $X < Y$ à la place de $2^{Y-X} \neq 0$ & $X \neq Y$.)

Les axiomes du *deuxième sous-groupe* sont les suivants:

(i) $x < 2^x$,

(ii) $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$,

(iii) $\forall X \forall y \exists Z \exists u \big((X = Z \cdot 2^y + u) \;\&\; (0 \leqslant u < 2^y)\big)$.

(Cella exprime la division avec reste par les puissances non nulles de 2; on peut écrire d'une manière univoque $Z = [X/2^y]$.)

(iv) $\forall X \exists y \exists Z \big(X \neq 0 \Rightarrow 2^y \cdot (1 + 2Z)\big)$.

(Cela donne la possibilité d'introduire la valeur dite dyadique pour chaque entier dyadique sauf zéro, par $W(X) = y$, au sens de la théorie générale de la valuation des corps algébriques, due à Krull).

Cela donné, on peut définir la relation dyadique „être élément" entre les entiers non négatifs et entiers dyadiques quelconques, par la formule

$$x \in_* Y \overset{\mathrm{df}}{\Longleftrightarrow} [Y/2^x] - 2 \cdot [Y/2^{x+1}] = 1 \, .$$

(On observe que dans le cas des entiers dyadiques ordinaires de Hensel, on a

$$x \in_* Y \Longleftrightarrow Y = \ldots + 2^x + \ldots$$

au sens du développement dyadique ordinaire; en général, bien entendu, on n'a pas de tels développements.)

Cette notion $\in_*$ possède déjà quelques propriétés de la notion primitive $\in$ de la théorie axiomatique des ensembles (et classes) de Bernays-Gödel, entre autres, les axiomes du groupe A de Σ sont vérifiés. En particulier, on définit le „couple" $\{xy\}_* = 2^x + 2^y$ pour $x \neq y$ et $\{xx\}_* = 2^x$; la notation $\langle xy \rangle_*$ („couple ordonné") est évidente.

Nous arrivons donc au *troisième groupe d'axiomes*; ce sont, essentiellement, *les axiomes du groupe B de Σ et l'axiome du choix E* de Gödel, exprimés par la notion $\in_*$, dans une formulation „arithmétique".

Enfin, on a un axiome important exceptionnel: *on y exige l'existence d'un entier dyadique A tel qu'on ait $\langle x\, x+1 \rangle_* \in_* A$ pour chaque x non négatif.*

Cela fait, on peut démontrer ce qui suit:

THÉORÈME I(a) (d'équivalence). *Les 25 axiomes de la théorie des entiers dyadiques étant admis et la relation $\in_*$ définie, tous les axiomes de la théorie axiomatique des ensembles finis de Bernays-Gödel sont vérifiés par $\in_*$.* (Notamment, chaque entier dyadique non négatif est un „ensemble", chaque entier dyadique général est une „classe".)

(La démonstration de ce fait est compliquée; elle est essentiellement contenue dans mon article *A contribution to Gödel's axiomatic set theory II*, paru dans Czech. Mat. J. 9 (84) (1959), 11-48.)

THÉORÈME I(b) (d'équivalence). *Les 19 axiomes de la théorie des ensembles finis de Bernays-Gödel étant admis, on peut définir* (d'une manière assez naturelle, mais avec quelques préliminaires nécessaires que nous pouvons omettre ici ([1])) *l'addition, la multiplication et la puissance arithmétique de* $2 = \{\{A\}\}$ *pour les classes* (au plus dénombrables) *de Gödel, de façon que tous les axiomes de notre théorie axiomatique des entiers dyadiques sont remplis.*

THÉORÈME II(a) (de reproduction). *En passant de la théorie des entiers dyadiques à la théorie des ensembles finis au sens du théorème* I(a) *— et en définissant ensuite l'addition, la multiplication et la puissance arithmétique de* 2 *au sens du théorème* I(b) *pour $\in_*$, on revient aux opérations arithmétiques originales.*

THÉORÈME II(b) (de reproduction). *En passant de la théorie des ensembles finis à la théorie des entiers dyadiques au sens du théorème* I(b) *— et en définissant ensuite $\in_*$ pour les classes comme entiers dyadiques au sens du théorème* I(a) *— on revient à la notion „être élément" primitivement supposée.*

(Les démonstrations de I(b), II(a) et II(b) seront publiées dans *A contribution ... III* dans Czech. Mat. J.)

Il me semble donc qu'une telle axiomatisation des entiers dyadiques pourrait être acceptée comme le fondement d'une théorie basale des nombres, du moins, d'un fragment assez important et riche de la théorie algébrique des nombres. (Bien entendu, le principe de l'induction devient ici un théorème, dans la formulation la plus forte: Chaque classe non vide d'entiers non négatifs contient le nombre le plus petit.)

En remplissant de cette façon les quatre conditions données auparavant, nous sommes enfin arrivés à la situation où seulement alors, on peut examiner en détail la question principale

([1]) L'intuition de cette possibilité est suggérée par la correspondance $0 \leftrightarrow A$, $1 = 2^0 \leftrightarrow \{A\}$, $2 = 2^{2^0} \leftrightarrow \{\{A\}\}$, $3 = 2^0 + 2^{2^0} \leftrightarrow \{A\{A\}\}$, $4 = 2^{2^{2^0}} \leftrightarrow \{\{\{A\}\}\}, \ldots$ (A est l'ensemble vide).

de l'analogie entre le fondement axiomatique de la géométrie et celui de la théorie des nombres que nous avons posée.

Or, le *premier problème* difficile qui se pose lorsqu'on veut démontrer une telle analogie, c'est de *trouver une hypothèse assez naturelle de la théorie des nombres — et deux interprétations de la théorie axiomatique des entiers dyadiques* (dans la théorie axiomatique des ensembles de Bernays-Gödel) *telles que l'une d'elles satisfasse — et l'autre ne satisfasse pas à cette hypothèse.* Naturellement, on ne peut pas considérer des hypothèses telles que p. ex. celles de Fermat ou de Goldbach, car on peut espérer arriver à des démonstrations de ces hypothèses en perfectionnant les méthodes algébriques et analytiques contemporaines de la théorie des nombres — et puis, peut-être, reformuler ces démonstrations en termes élémentaires de la „reine Zahlentheorie" (²). Donc, il faut essayer des hypothèses dans lesquelles toutes les méthodes de la théorie des nombres n'ont pas abouti jusqu'à l'heure actuelle, à un progrès, même minimal, vers la solution du problème. Un tel problème est, par exemple, la question bien connue (posée par un anonyme), de savoir *si tous les nombres de la forme* $2+1$, 2^2+1, $2^{2^2}+1$, $2^{2^{2^2}}+1$, ... (sauf, un nombre fini d'exceptions) *sont des nombres premiers.*

Notre premier problème, quoique très difficile, ne semble pas désespéré. Jusqu'à présent, au moins, j'ai construit par interprétation (³) (dans la théorie axiomatique des ensembles de Bernays-Gödel) des divers modèles (indénombrables) de la théorie des entiers dyadiques qui sont structuralement assez différents. La théorie structurale des entiers dyadiques abstraits peut bien être développée par les méthodes de la théorie générale de la valuation dans le sens dû à Krull. (Voir mon article *A contribution ... II*).

Or, il y a un *second problème* à résoudre pour justifier notre point de vue strictement axiomatique dans les fondements de la théorie des nombres — c'est-à-dire pour donner une réponse affirmative à la question de l'analogie entre la géométrie et la théorie des nombres. C'est *le problème qui consiste à plonger un modèle quelconque de la théorie des ensembles finis*

(²) V. la fin de cette conférence.

(³) A savoir, de notre point de vue la notion dite sémantique du modèle (basée sur la notion essentiellement métamathématique de satisfaction) n'est pas admissible dans le cas de la théorie axiomatique des nombres.

(ou bien, ce qui est la même chose, de la théorie des entiers dyadiques) — *dans un modèle de la théorie générale des ensembles* — de façon que *les nombres ordinaux du modèle plongé deviennent des nombres ordinaux finis du modèle entier.*

Ce problème semble très difficile. Il est d'une nature très proche de celle des grands problèmes actuels de la théorie axiomatique des ensembles, du problème de l'indépendance de l'hypothèse du continu ou de l'axiome du choix (relativement au „Fundierungsaxiom" non restreint).

Si on réussissait à résoudre nos deux problèmes, cela signifierait un nouveau succès décisif de la méthode axiomatique au sens original de Hilbert. De plus, on serait obligé d'en tirer des conséquences importantes pour une réinterprétation critique de la théorie des sentences formellement indécidables et de la théorie des fonctions récursives. Naturellement, les résultats de la théorie élémentaire constructive des nombres naturels n'en seraient pas touchés; on pourrait considérer (de notre point de vue) cette théorie comme analogue à la géométrie (absolue) sans points à l'infini, avec une différence importante: cette théorie „absolue" des nombres (dont les théorèmes restent valables dans toutes les théories des nombres) n'est pas axiomatisable (au sens fini).

En concluant, je voudrais dire que je n'ai pas l'intention de faire un dogme du point de vue présenté. Je crois seulement avoir montré que ce point de vue semble être bien possible et ne pas être dépourvu d'intérêt — et qu'il faut essayer de le réaliser — ou bien de prouver qu'une telle réalisation serait nécessairement arrêtée par des obstacles insurmontables.